

# 5

质量管理教程

## 过程能力分析

Process Capability Analysis

### CHAPTER OUTLINE

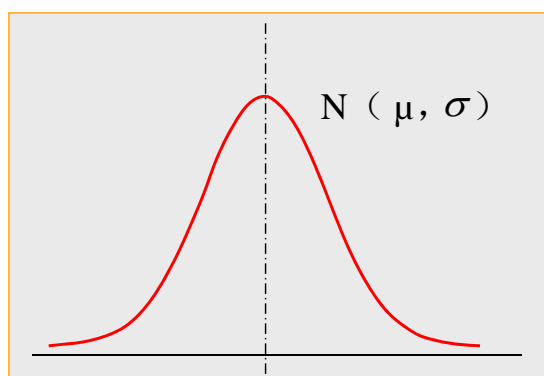
- 5.1 什么是过程能力
- 5.2 多变异分析 (MVA)
- 5.3 数据分布的正态性检验
- 5.4 过程能力指数Cp和Cpk
- 5.5 计数值数据过程能力

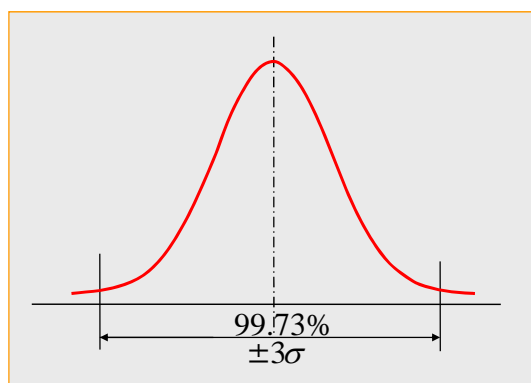


QUALITY MANAGEMENT

### 5.1 过程能力

- 过程能力是指过程的一致性.





$$B = \pm 3\sigma$$

## PCA的一般步骤

1. 确定样本含量 (n)
2. 确定合理的抽样方案
3. 抽样、测量并记录数据
4. 绘制直方图，检查数据的正态性
5. 检查是否存在系统性因素
6. 计算过程能力指数  $C_P$ ,  $C_{PK}$  等

## 样本含量与工序能力

- 进行工序能力分析时，一般随机抽样的样本含量在100—200之间
- 若样本含量太小，一方面不易判定数据分布的正态性，另一方面，所计算的工序能力与实际工序能力的差别会较大。一般仅在破坏性检验或抽样费用高、抽样时间长的情况下使用小样本。
- 无论样本含量大小，抽样应是随机的。
- 样本应能捕获主要的随机性变异。



5

## 合理的抽样方案

- 一个合理的抽样应能捕获工序过程的随机性变异
  - 一个合理的抽样不应有系统性变异
- 抽样时应注意记录以下几点：
- 谁测量的数据？
  - 测量仪器是否被校准？
  - 搜集数据后工序是否有变化？
  - 对影响工序输出的关键影响因素所发生的变化是否做了记录？
  - 数据搜集的时间、工序、目的、抽样方式



6

## 5.2 多变异分析

### 一、什么是多变异分析 (Multi-vari Analysis)

- 三种类型的变异
  - 产品内变异
  - 产品间变异
  - 时间变异
- 多变异分析是确定合理抽样方案的分析工具，通过多变异分析，可以发现主要的变异来源，保证抽样能捕获主要的随机性变异



7

## 二、多变异图的步骤

1. 绘制X轴和Y轴。Y轴表示质量特征值；X轴表示按时间抽取的样本号。按不同时间点分成区域，并在每个区域的X轴标上样本号
2. 从第一个时间点抽取的第一个样品开始，在X轴上找到所对应的点，根据一个样品上的几个测量值的最大值和最小值绘制出垂直的线条图，并标出其平均值，直到将所有样品的线条都绘制出来。
3. 将相邻两个样品的均值一一连接起来，样品间均值的波动表示产品间变异，各样本线条的高度表示产品内变异
4. 分别计算各时间点样本观测值的均值，并在Y轴上找到对应数值绘制一条水平线，表示该时间点的平均值，各时间点均值之差别，即时间变异
5. 标明多变异图的数据来源、绘制目的、时间、采样人、绘制人等信息。



8

## 举例

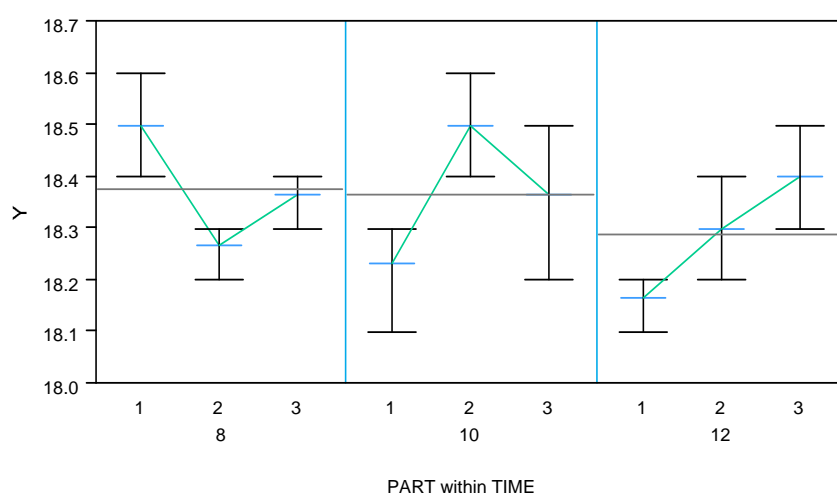
某轴承车削工序加工的轴直径存在波动，为了分析波动来源，做了多变异分析，质量工程师们选择了三个时间点，8:00 AM、10:00 AM、12:00 AM，每个时间点连续抽取3根轴，又从每根轴上分别选了3个测量点（两端和中间），其测量结果如下：

时间	8AM			10AM			12AM		
样品位置	1	2	3	1	2	3	1	2	3
左端	185	182	184	183	184	182	182	184	183
中点	186	183	184	181	185	184	182	183	184
右端	184	183	183	183	186	185	181	182	185
样品平均值	18.50	18.27	18.43	18.23	18.50	18.37	18.17	18.30	18.40
组平均	18.40			18.37			18.29		



9

## 三、多变异分析图



10

#### 四、根据多变异分析确定合理的抽样方案

- 产品内测量点的个数（a）：若存在产品内变异，则每个产品至少测2点；若产品内变异较大，可适当增加测量点数，一般取3—5个测量点。
- 一次抽取的产品个数（b）：至少3个以上，若产品间变异较大，一般抽10—20，甚至更多。



11

- 抽样的时间点数（k）：一般3个以上，若抽样的目的是为了研究变异来源，则可以多取几个时间点；若进行工序能力分析，一般时间点不宜太多，时间跨度不宜太长，否则抽样过程中易受系统性原因的影响。另外，如果多变异分析结果表明时间变异较大，说明工序不稳定，应分析是否存在系统性原因，在消除系统性原因后重新抽样。

- 样本含量=  $a \times b \times k$



12

### 5.3 数据分布的正态性检验

正态性是指与正态分布曲线相吻合并且数据是连续的。

Cp 和 Cpk 的计算是基于正态分布的

数据非正态可能由于以下原因：

- 数据来自不同样本
- 过程不稳定
- 过程非正态



13

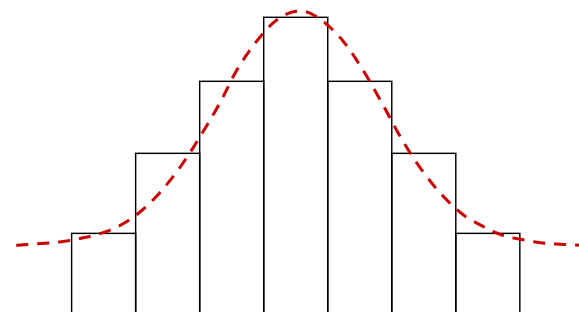
### 检验数据正态性的方法

- 直方图
- 正态概率纸
- $\chi^2$  检验
- Shapiro-wilk检验



14

## 根据直方图判定是否为正态分布



正态分布

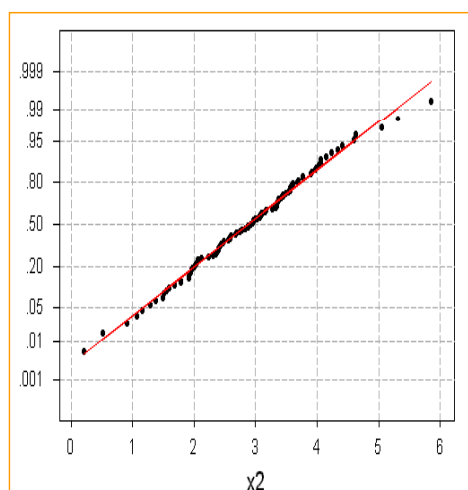


天津大学

15

## 用正态概率纸判定数据的正态性

- 横坐标等间隔
- 纵坐标按标准正态分布的累积概率  $F(X)=P(u < X)$  表示的，其不等间隔



天津大学

16



## 具体操作

- 把数据排序:  $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$
- 在点  $X_{(k)}$  处的累计概率  $F(X) = P(X < X_{(k)})$ , 用修正频率估计

$$\frac{k-3/8}{n+1/4} \quad \text{或} \quad \frac{k}{n+1}$$

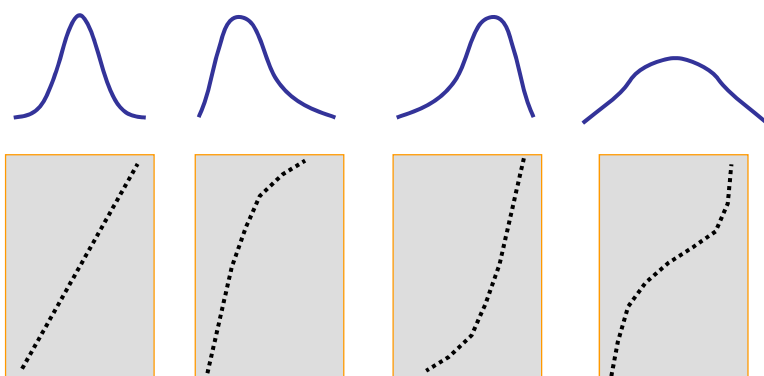
- 把  $n$  个点逐一描在概率纸上
- 用目视去判断



天津大学

17

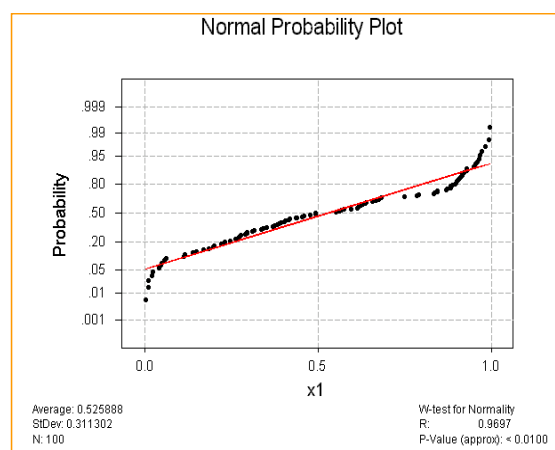
## 典型非正态分布在概率纸上的曲线



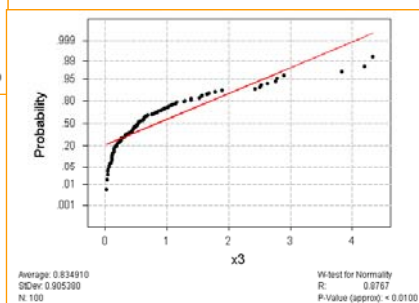
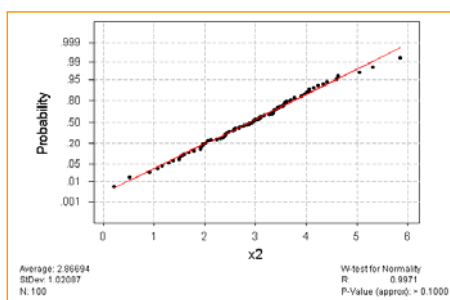
天津大学

18

打开 “normality”, 选择 *Stat > Basic Statistics > Normality Test*, 分别将 “X1”, “X2”, “X3” 作为 *Variable* ,得到分布



19



20

## 非正态数据下工序能力

- 若数据呈非正态分布，首先应查找工序中是否存在系统性原因，很多情况下，非正态性是由于系统性原因造成的。若一旦发现了系统性原因，应采取措施，将由于系统性原因产生的数据删除，或将系统性原因排除后，重新搜集数据。
- 若非正态性是由于工艺过程中特殊的工艺特点造成的，应考虑将非正态数据转化为正态，此时公差也要做同等转化。



21

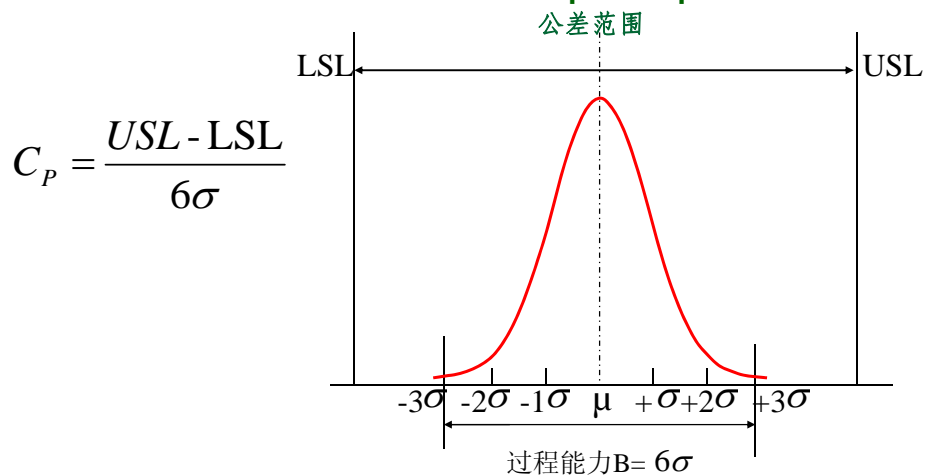
## 几种将非正态数据转化为正态的方法

- (1) 倒数转换:  $\frac{1}{x}$
- (2) 平方根转换:  $\sqrt{x}$
- (3) 立方根转换:  $\sqrt[3]{x}$
- (4) 对数转换:  $\log x$ 或 $\ln x$
- (5) BOX-COX转换



22

## 5.4 过程能力指数Cp和Cpk



23

## Cp的估计

$$\hat{C}_P = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}}$$

$$\hat{\sigma} = s / c_4 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} / c_4$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (\text{分组样本的样本含量 } n < 7)$$

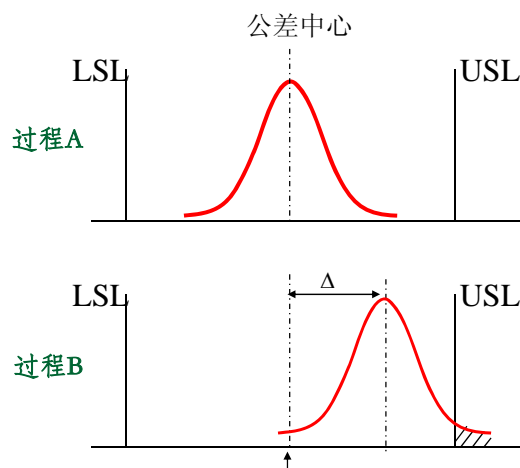
为简单起见，或直接采用有偏估计  $\hat{\sigma} = s$



24

## Cp 能反映过程的缺陷率吗？

过程A 和过程B  
的Cp相同，但是  
质量水平却相差  
甚远。



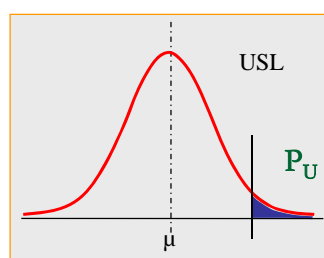
25

## 单侧公差下的过程能力指数Cpu和Cpl

右单侧情形：

$$C_{PU} = \frac{USL - \mu}{3\sigma}$$

$$\hat{C}_{PU} = \frac{USL - \bar{X}}{3\hat{\sigma}}$$



$$P_U = 1 - \Phi\left(\frac{USL - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(3C_{PU})$$

$$= \Phi(-3C_{PU})$$



26

## C<sub>PU</sub>计算举例

某企业要求供应商生产的 轴径向跳动不超过0.01mm， 从该供应商现场实测的数据，过程服从正态分布，均值是0.009,标准差为0.001， 计算C<sub>pu</sub>, 估计该过程的不良品率水平。



天津大学

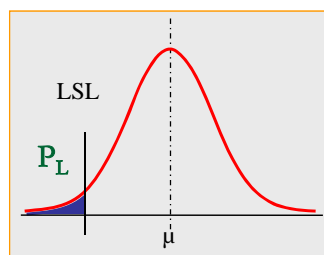
27

左单侧情形:

$$C_{PL} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma}$$

$$\hat{C}_{PL} = \frac{\bar{X} - LSL}{3\hat{\sigma}}$$

$$P_L = \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(-3C_{PL})$$



天津大学

28

## $C_{PL}$ 计算举例

若某电容工序要求击穿电压要大于3000伏；今从生产过程随机抽样100个电容，测的平均击穿电压为3500伏，标准差为200伏，且击穿电压服从正态分布。计算 $C_{PL}$ ，估计该过程的缺陷率。



29

## Cpk的计算

1. 只有右单侧公差USL:  $C_{PK} = C_{PU}$
2. 只有左单侧公差LSL:  $C_{PK} = C_{PL}$



30

## 双侧公差下 $C_{PK}$ 的计算

$$(1) \quad C_{PK} = \min\{C_{PU}, C_{PL}\}$$

$$(2) \quad C_{PK} = \frac{USL - LSL - 2\Delta}{6\sigma}$$

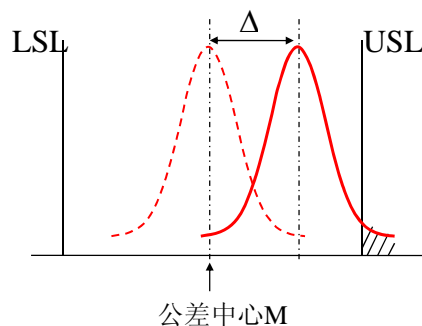
$$(3) \quad C_{PK} = C_p (1-k)$$

$$\text{其中: } k = \frac{2\Delta}{T}$$

$$\Delta = |\mu - M|$$

$$M = (USL - LSL) / 2$$

$$T = USL - LSL$$



天津大学

31

## 双侧公差下 $C_{PK}$ 的计算（续）

$$\begin{aligned} C_{PK} &= \frac{USL - LSL - 2\Delta}{6\sigma} = \frac{USL - LSL - k(USL - LSL)}{6\sigma} \\ &= \frac{(USL - LSL)}{6\sigma} (1-k) \\ &= C_p (1-k) \end{aligned}$$



天津大学

32





## CP、CPK 与缺陷率

■ 问题：

1、如果有两个加工过程，其CPK 相等，Cpk=1.0，问它们的加工质量水平一样吗？

2、有以下两个加工过程A和B，其过程能力指数如下：

A: CP=1.0; CPK=1.0

B: CP=1.33; CPK=1.0

问：它们的质量水平完全相同吗？



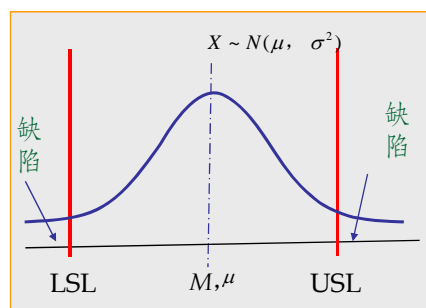
天津大学

35

## C<sub>p</sub>、C<sub>pk</sub>与不合格品率P的关系

■ 公差中心与分布中心重合

$$\begin{aligned}
 \text{缺陷率 } P &= \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) + \left[1 - \Phi\left(\frac{USL - \mu}{\sigma}\right)\right] \\
 &= 2 \times \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) \\
 &= 2 \times \Phi\left(\frac{-T/2}{\sigma}\right) \\
 &= 2 \times \Phi(-3C_p)
 \end{aligned}$$

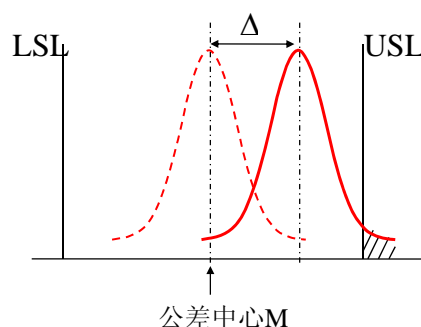


天津大学

36

## C<sub>p</sub>、C<sub>pk</sub>与不合格品率P的关系

- 公差中心与分布中心不重合



$$C_P = \frac{C_{PU} + C_{PL}}{2}$$

$$P = P_U + P_L = \Phi(-3C_{PU}) + \Phi(-3C_{PL})$$

$$= \Phi(-3C_{PK}) + \Phi[-3C_P(1+k)]$$



天津大学

37

## 工程实例

- SMT (Surface Mount Technology) 问题:

某手机制造商在PCB装配中采用SMT工艺，在锡浆印刷过程中工艺要求锡浆的厚度为 $0.12 \pm 0.01$  mm, 今从该过程连续抽去15块PCB板（每块板上有8块手机主板），选取8个测量点，测得锡浆厚度的数据，并且已知主要的随机性变异表现为每块PCB板上不同位置上的变异，利用测量数据估计过程能力指数C<sub>P</sub>和C<sub>PK</sub>。



天津大学

38

### 测试数据（单位: mm）

位置 PCB	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.122	0.119	0.125	0.122	0.115	0.119	0.118	0.123
2	0.125	0.121	0.121	0.118	0.117	0.115	0.123	0.118
3	0.118	0.115	0.117	0.119	0.123	0.116	0.119	0.117
4	0.121	0.125	0.118	0.123	0.118	0.121	0.120	0.121
5	0.118	0.12	0.116	0.115	0.124	0.117	0.116	0.112
6	0.117	0.115	0.119	0.119	0.112	0.122	0.123	0.12
7	0.112	0.124	0.124	0.121	0.125	0.112	0.114	0.117
8	0.12	0.114	0.118	0.113	0.125	0.119	0.123	0.119
9	0.117	0.116	0.117	0.116	0.119	0.125	0.124	0.122
10	0.123	0.125	0.115	0.112	0.122	0.117	0.12	0.127
11	0.115	0.121	0.122	0.122	0.109	0.127	0.116	0.118
12	0.122	0.116	0.124	0.116	0.123	0.123	0.121	0.12
13	0.116	0.12	0.123	0.118	0.123	0.117	0.124	0.111
14	0.119	0.117	0.117	0.124	0.119	0.12	0.121	0.12
15	0.123	0.119	0.122	0.122	0.124	0.117	0.131	0.116



天津大学

39

### 举例（续）

统计分析表明，该过程是稳定的，独立的且数据服从正态分布。（实验课中将作验证）

根据以上数据可以计算出：

$$\bar{X} = 0.119$$

$$S = 0.0039$$

$$\hat{C}_P = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{0.02}{6 \times 0.0039} = \frac{0.02}{0.0234} = 0.855$$

$$C_{PK} = \min\{C_{PU}, C_{PL}\} = C_{PL}$$

$$\hat{C}_{PK} = \hat{C}_{PL} = \frac{\bar{X} - LSL}{3S} = \frac{0.119 - 0.11}{3 \times 0.0039} = \frac{0.009}{0.0117} = 0.77$$



天津大学

40

## 举例（续）

- 课下作业：

针对本例计算出的 $C_p$ 和 $C_{pk}$ ，估计该过程的缺陷率。



41

## 计算 $C_p$ 、 $C_{pk}$ 的前提条件

- 过程受控
- 正态性
- 独立性

**不要对不稳定的过程计算 $C_p$  和  $C_{pk}$**



42

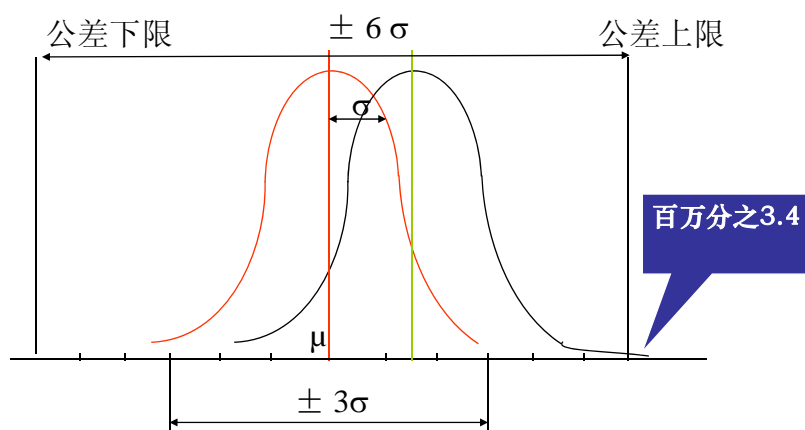
## 过程能力分析应注意的问题

- ★ 抽样是合理的
- ★ 样本量尽量大,通常大于100
- ★ 过程稳定
- ★ 数据相互独立
- ★ 检查是否有异常值
- ★ 检验数据正态性,必要时化为正态
- ★ 注意用数据的单值,而不是均值



43

## 六西格玛的统计解释



$C_p=2.0$  ;  $C_{pk}=1.5$



44

西格玛水平与缺陷率

西格玛水平	Cp	Cpk	缺陷率
6	2	1.5	0.000003398
5	1.666667	1.166667	0.00023
4	1.333333	0.833333	0.0062
3	1	0.5	0.067
2	0.666667	0.166667	0.31
1	0.333333	-0.16667	0.69



过程能力指数的评价标准

Cp的取值范围	级别	过程能力的评价
$C_p \geq 1.67$	I	过程能力较高（考虑是否可以降低成本）
$1.67 > C_p \geq 1.33$	II	过程能力充分
$1.33 > C_p \geq 1.0$	III	过程能力尚可，但接近1.0时要注意
$1.0 > C_p \geq 0.67$	IV	过程能力不足，需要采取措施
$0.67 > C_p$	V	过程能力严重不足



## 基于过程能力分析改进过程

- Cp较大，但是Cpk 较差
  - 优化工艺
  
- Cp和Cpk 均较差
  - 如果工艺水平较差，改进工艺
  - 如果工艺水平已经很好，则需要改进产品的设计



47

$$C_{pm}$$

- 田口玄一（Taguchi）等在1985年提出了一个新的工序能力指数 $C_{pm}$

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{(\mu - M)^2 + \sigma^2}}$$

M为过程的目标值



48



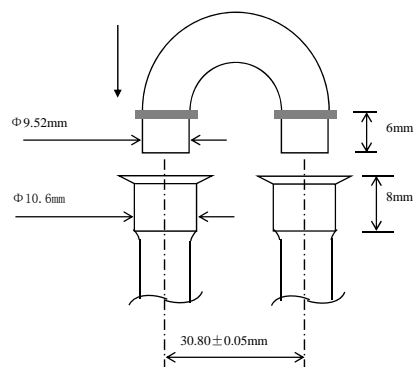
## 过程能力分析案例

案例背景：

- 本案例源于科研课题
- 某大型空调企业在空调两器生产过程中，自动焊接缺陷是一个关键工序
- 70% 的空调制冷剂泄漏源于该过程的焊接潜在缺陷。



天津大学



51



天津大学

52

案例（续）

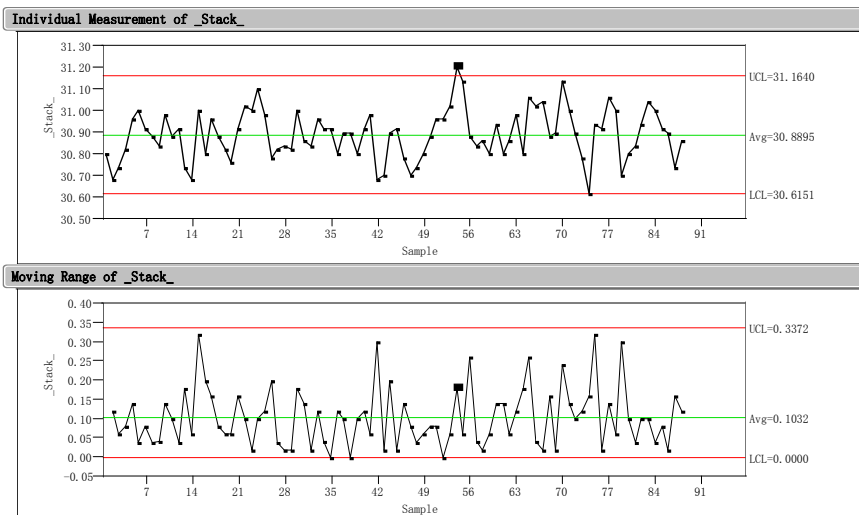
某企业涨管机加工的半圆管中心距公差为  $30.80 \pm 0.05$ , 今从该工序随机抽取88个半圆管，测得中心距如下表所示。要求对该过程进行过程能力分析。



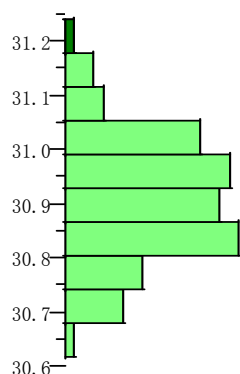
3-1	3-2	3-3	3-4
30.80	30.68	30.74	30.82
30.96	31.00	30.92	30.88
30.84	30.98	30.88	30.92
30.74	30.68	31.00	30.80
30.96	30.88	30.82	30.76
30.92	31.02	31.00	31.10
30.98	30.78	30.82	30.84
30.82	31.00	30.86	30.84
30.96	30.92	30.92	30.80
30.90	30.90	30.80	30.92
30.98	30.68	30.70	30.90
30.92	30.78	30.70	30.74
30.80	30.88	30.96	30.96
31.02	31.20	31.14	30.88
30.84	30.86	30.80	30.94
30.80	30.86	30.98	30.80
31.06	31.02	31.04	30.88
30.90	31.14	31.00	30.90
30.78	30.62	30.94	30.92
31.06	31.00	30.70	30.80
30.84	30.94	31.04	31.00
30.92	30.90	30.74	30.86



## 过程稳定性检查



55



### Goodness-of-Fit Test

Shapiro-Wilk W Test

W Prob&lt;W

0.984431 0.7802

正态性检查

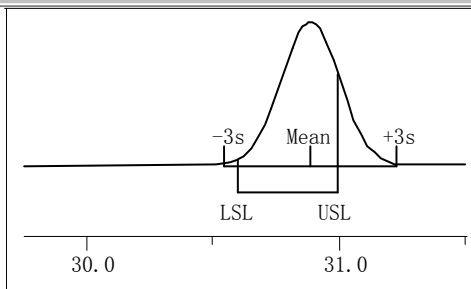
Mean	30.889545
Std Dev	0.1145898
Std Err Mean	0.0122153
upper 95% Mean	30.913825
lower 95% Mean	30.865266
N	



56

## 过程能力分析报告

Overall, Sigma = 0.11459



Capability	Index	Lower CI	Upper CI
CP	0.582	0.495	0.668
CPK	0.321	0.236	0.407
CPM	.	.	.
CPL	0.842		
CPU	0.321		
Portion	Percent	PPM	
Below LSL	0.575557	55.3642	
Above USL	16.754516	7544.92	
Total Outside	17.330017	3300.28	



天津大学

57

## 本节内容总结

- 过程能力指数的计算
- 过程能力指数的分析
- 过程能力指数的评价



天津大学

58

## 5.5 计数值数据工序能力的分析

- 有些工序过程，其输出不能用计量值数据来衡量，工序质量的判定是依据是否存在缺陷及缺陷的多少来衡量。

$$DPU(\text{单位缺陷}) = \frac{\text{样本中检测出的缺陷个数}}{\text{样本中单位产品个数}}$$

- 举例：在某PCB板插件工序上抽取了200块PCB板，发现共有50个缺陷。因此

$$DPU = \frac{50}{200} = 0.25$$

\*DPU-Defects Per Unit



59

## 缺陷机会及DPMO (Defect Per Million Opportunities)

- DPU是能反映出工序质量的高低，但不同复杂度产品的DPU不具备横向可比性
- **缺陷机会**，是指在生产过程中由于工人、机器或零部件等原因可能对产品造成的缺陷的机会，一般来讲，工序越多，产品越复杂，产品可能出错的机会就越多
  - 例如，在PCB板上插10个插件和100个插件，其缺陷机会肯定不同，前者为10个缺陷机会，后者为100个缺陷机会
- **百万缺陷机会缺陷数（DPMO）**就是考虑到不同复杂度产品缺陷机会后的规范化的指标,它可以用于不同复杂度产品的横向比较
  - DPMO的公式还可以具体表示成：

$$DPMO = \frac{DPU \times 10^6}{\text{单位产品上出现缺陷的机会数}}$$

$$DPMO = \frac{\text{总的缺陷数}}{\text{产品数} \times \text{机会数}} \times 10^6$$



60

## 计算DPMO应注意的问题

- 工序过程应处于受控状态，即工序中不应出现系统性原因导致的缺陷
- 样本含量要充分大
- 对缺陷机会的定义要明确并有意义

例 5.6 打字员小李一天打了 100 张纸，每张 1200 个字，总共有 90 个错误，计算该过程的 DPMO。

解 
$$DPMO = \frac{90}{100 \times 1200} \times 10^6 = 750$$



61

## 本章完，谢谢各位！

地 址：天津大学管理学院  
邮 编：300072  
Email: shi@tju.edu.cn

天津大学质量管理课程组