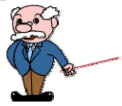
前　　言

统计研究的基础是统计数据。数据是经济状况的反映，对数据进行深入的统计分析则是管理决策的重要环节。

统计方法是一种分析工具，其正确使用有赖于三个方面：一是数据调查必须符合随机性的要求。在抽样调查中要避免为迎合调查所希望的结论而有意偏向地选择样本等。二是模型和方法的选择必须符合科学性。针对某个问题是选择线性的还是非线性的模型，选择多少个自变量和哪些自变量，使用哪种类型的相关指标，问题适合于用回归分析还是时间序列分析来处理等都需要作出合适的判断。而若判断不当，结果很可能是统计分析形式上合乎规范，但实质却是个“伪问题”。三是在统计分析结果的解释上必须符合客观性。在这一点上如果考虑不周，将导致一个正确的统计分析引申出不当的结论。如不合理的外推，在数据量不大时，对接受或否定一个统计假设的含义作出过度的解释，以及轻率地将统计相关关系解释为因果关系之类。这些问题的妥善处理并无一定之规，在很大程度上取决于经验以及对所研究问题的背景的了解。上述种种问题的存在为统计方法的滥用和误用开了方便之门。这是在学习、理解和使用统计方法时必须留意的地方。《不列颠百科全书》把统计学定义为“收集和分析数据的科学和艺术”，其中标出统计方法的“艺术”属性，当然不能拘泥于其字面意义去理解，其含义从上文所论可以有所领悟。

我们认为，统计学是一门收集、整理和分析统计数据的方法科学，其目的是探索数据内在的数量规律性，以达到对客观事物的科学认识。取得统计数据是进行统计分析的基础和前提，离开了统计数据，统计方法就失去了用武之地。如何取得准确可靠的数据是统计学研究的重要内容之一，通常需要对调查人员和试验人员进行专门的培训。统计数据的整理是通过对统计数据的加工处理使其系统化、条理化，符合统计分析的需要，是介于数据收集与数据分析之间的一个必要环节。统计数据的分析是统计学的核心内容，它是通过统计描述和统

全国Mini-MBA职业经理双证班



精品课程　权威双证　全国招生　请速充电

教委批准成立正规管理类教育机构，近 20 年实战教育经验，值得信赖！（教证：0000154160 号）

全国迷你 MBA 职业经理双证书班®，全国招生，毕业颁发双证书，近期开课.咨询电话:13684609885

招生专业及其颁发证书

认证项目	颁 发 双 证	学 费
全国《职业经理》MBA 高等教育双证书班	高级职业经理资格证书＋2 年制 MBA 高等教育研修结业证书	1280 元
全国《人力资源总监》MBA 双证书班	高级人力资源总监职业经理资格证书＋2 年制 MBA 高等教育研修证书	1280 元
全国《生产经理》MBA 高等教育双证班	高级生产管理职业经理资格证书＋2 年制 MBA 高等教育研修结业证书	1280 元
全国《品质经理》MBA 高等教育双证班	高级品质管理职业经理资格证书＋2 年制 MBA 高等教育研修结业证书	1280 元
全国《营销经理》MBA 高等教育双证班	高级营销经理资格证书＋2 年制 MBA 高等教育研修结业证书	1280 元
全国《物流经理》MBA 高等教育双证班	高级物流管理职业经理资格证书＋2 年制 MBA 高等教育结业证书	1280 元
全国《项目经理》MBA 高等教育双证班	高级项目管理职业经理资格证书＋2 年制 MBA 高等教育研修结业证书	1280 元
全国《市场总监》MBA 高等教育双证书班	高级市场总监职业经理资格证书＋2 年制 MBA 高等教育研修结业证书	1280 元
全国《酒店经理》MBA 高等教育双证班	高级酒店管理职业经理资格证书＋2 年制 MBA 高等教育研修结业证书	1280 元
全国《企业培训师》MBA 高等教育双证班	企业培训师高级资格认证毕业证书＋2 年制 MBA 高等教育研修证书	1280 元
全国《财务总监》MBA 高等教育双证班	高级财务总监职业经理资格证书＋2 年制 MBA 高等教育研修结业证书	1280 元
全国《营销策划师》MBA 双证书班	高级营销策划师高级资格认证证书＋2 年制 MBA 高等教育研修证书	1280 元
全国《企业总经理》MBA 高等教育双证班	全国企业总经理高级资格证书＋2 年制 MBA 高等教育研修结业证书	1280 元
全国《行政总监》MBA 高等教育双证班	高级行政总监职业经理资格证书＋2 年制 MBA 高等教育结业证书	1280 元
全国《采购经理》MBA 高等教育双证班	高级采购管理职业经理资格证书＋2 年制 MBA 高等教育结业证书	1280 元
全国《医院管理》MBA 高等教育双证班	高级医院管理职业经理资格证书＋2 年制 MBA 高等教育结业证书	1280 元
全国《IE 工业工程管理》MBA 双证班	高级 IE 工业工程师职业资格证书＋2 年制 MBA 高等教育结业证书	1280 元
全国《企业管理咨询师》MBA 双证班	高级企业管理咨询师资格证书＋2 年制 MBA 高等教育结业证书	1280 元
全国《工厂管理》MBA 高等教育双证班	高级工厂管理职业经理资格证书＋2 年制 MBA 高等教育结业证书	1280 元

【授课方式】 全国招生、函授学习、权威双证

我校采用国际通用3结合的先进教育方式授课：远程函授＋视频光盘+网络学院在线辅导（集中面授）

【颁发证书】学员毕业后可以获取权威双证书与全套学员学籍档案

1、毕业后可以获取相应专业钢印《高级职业经理资格证书》；

2、毕业后可以获取2年制的《MBA研究生课程高等教育研修结业证书》；

【证书说明】

1、证书加盖中国经济管理大学钢印和公章（学校官方网站电子注册查询、随证书带整套学籍档案）；

2、毕业获取的证书与面授学员完全一致，无“函授”字样，与面授学员享有同等待遇，

【学习期限】 3个月（允许有工作经验学员提前毕业，毕业获取证书后学校仍持续辅导2年）

【收费标准】 全部费用1280元（含教材光盘、认证辅导、注册证书、学籍注册等全部费用）

函授学习为你节省了大量的宝贵的学习时间以及昂贵的MBA导师的面授费用，是经理人首选的学习方式。

【招生对象】

1、对管理知识感兴趣，具有简单电脑操作能力（有2年以上相应工作经验者可以申请提前毕业）。

2、年龄在20－55岁之间的各界管理知识需求者均可报名学习。

【教程特点】

1、完全实战教材，注重企业实战管理方法与中国管理背景完美融合，关注学员实际执行能力的培养；

2、对学员采用1对1顾问式教学指导，确保学员顺利完成学业、胸有成竹的走向领导岗位；

3、互动学习：专家、顾问24小时接受在线教学辅导+每年度集中面授辅导

【考试说明】

1. 卷面考核：毕业试卷是一套完整的情景模拟试卷（与工作相关联的基础问卷）

2. 论文考核：毕业需要提交2000字的论文（学员不需要参加毕业论文答辩但论文中必修体现出5点独特的企业管理心得）

3. 综合心理测评等问卷。

【颁证单位】

中国经济管理大学经中华人民共和国香港特别行政区批准注册成立。目前中国经济管理大学课程涉及国际学位教育、国际职业教育等。学院教学方式灵活多样，注重人才的实际技能的培养，向学员传授先进的管理思想和实际工作技能，学院会永远遵循“科技兴国、严谨办学”的原则不断的向社会提供优秀的管理人才。

【主办单位】

美华管理人才学校是中国最早由教委批准成立的“工商管理MBA实战教育机构”之一,由资深MBA教育培训专家、教育协会常务理事徐传有老师担任学校理事长。迄今为止，已为社会培养各类“能力型”管理人才近10万余人，并为多家企业提供了整合策划和企业内训，连续13年被教委评选为《优秀成人教育学校》《甲级先进办学单位》。办学多年来，美华人独特的教学方法，先进的教学理念赢得了社会各界的高度赞誉和认可。

【咨询电话】13684609885 0451--88342620 **【咨询教师】**王海涛 郑毅

【学校网站】http://www.mhjy.net **【咨询邮箱】** xchy007@163.com

【报名须知】

1、报名登记表格下载后详细填写并发邮件至 xchy007@163.com (入学时不需要提交相片，毕业提交试卷同时邮寄4张2寸相片和一张身份证复印件即可)

2、交费后请及时电话通知招生办确认，以便于收费当日学校为你办理教材邮寄等入学手续。

【证书样本】（全国招生 函授学习 权威双证 请速充电）

（高级职业经理资格证书样本）

（两年制研究生课程高等教育结业证书样本）

【学费缴纳方式】（请携带本人身份证到银行办理交费手续，部分银行需要查验办理者身份证）

方式一	学校地址	邮寄地址：哈尔滨市道外区南马路 120 号职工大学 109 室 邮政编码：150020　　收件人：王海涛
方式二	学校帐号 （企业账户）	学校帐号：184080723702015　账号户名：哈尔滨市道外区美华管理人才学校 开户银行：哈尔滨银行中大支行　支付系统行号：313261018034
方式三	交通银行 （太平洋卡）	帐号：40551220360141505　　户名：王海涛 开户行：交通银行哈尔滨分行信用卡中心
方式四	邮政储蓄 （存折）	帐号：602610301201201234　　户名：王海涛 开户行：哈尔滨道外储蓄中心
方式五	中国工商银行 （存折）	帐号：3500016701101298023　户名：王海涛 开户行：哈尔滨市道外区靖宇支行
方式六	建设银行帐户 （存折）	中国人民建设银行帐户（存折）：　1141449980130106399 用户名：王海涛
方式七	农业银行帐户 （卡号）	农业银行帐户（卡号）：　6228480170232416918 用户名：王海涛 农行卡开户银行：中国农业银行黑龙江分行营业部道外支行景阳支行
方式八	招商银行 （卡号）	招商银行帐户（卡号）：　6225884517313071　　用户名：王海涛 招商银行卡开户银行：招商银行哈尔滨分行马迭尔支行

可以选择任意一种方式缴纳学费，收到学费当天，学校就会用邮政特快的方式为你邮寄教材、考试问卷以及收费票据。

计推断的方法探索出数据内在的数量规律性的过程，也是本教材的重点。

本教材由华南理工大学宋光辉教授编著，由于编者水平所限，恳请读者多提宝贵意见。

编　者

2006 年 9 月

目　　录

1 管理统计学概述

学习目标 本章学习统计学的有关概念。重点要掌握统计学的研究对象、描述统计和推断统计的关系、总体和变量等知识。

1.1 统计、统计学和管理统计学

1.1.1 统计

人们对统计一词很难简单地定义。它可以是指统计数据的搜集活动，即统计工作；也可以是指统计活动的结果，即统计数据；还可以是指对统计数据进行收集、汇总和分析的方法和技术，即统计学。

对一国或某地区的人均收入水平进行调查，就是统计工作。统计工作的过程可以分为设计调查方案、实际搜集数据、对数据进行汇总整理、对整理结果进行统计分析等几个环节。统计调查得到的数据有原始数据和次级数据之分。未经过加工的数据称为原始数据。例如，对某产品的重量进行抽样调查，得到样本的 4 个数据分别为 8、5、6、6 公斤，它们的总和为 25 公斤，其平均值为 6.25 公斤。8、5、6、6 就是原始数据。而如果收集到的统计数据就是已经加工后的数据，如 25(总和)和 6.25(平均值)等，则称为次级数据。原始数据和次级数据都是统计工作的结果，都统称为统计数据。如何科学地收集、汇总和分析统计数据，则是统计学的研究任务。

1.1.2 管理统计学及其作用

我们对统计学的定义是：统计学是收集、汇总和分析统计数据的科学和艺术。

统计学在如下方面发挥了作用：

• 高露洁公司为了控制洗涤产品质量利用统计学。

• 一家医院利用统计方法决定对身患绝症病人的收容时间的安排。

• 某化学公司专门提供特殊产品，利用统计学来解决顾客退货问题。

• 某管理公司的许多人共同使用一套计算机系统，利用统计方法解决使用高峰期不能进入问题。

• 宝洁公司利用统计方法决策，对两种原料的成本进行选择问题。

• 一家造纸和林业制品公司利用抽样方法了解森林近期和长远的合理种植和采伐问题。

• DG 公司通过抽样了解库存价格波动区间。

• RF 通讯公司利用假设检验寻找导致产品质量问题的原因。

• 药物公司成功开发出一种新平均周期为 12 年，经过三个阶段的检验(临床前、长期使用、临床效果)，用假设检验方法及早剔除不成功者和发现有开发前景的新药。

• 一项清洁河流的计划在得到批准之前需要确定其数据的真实性，通过总体方差检验的结果，发现了不真实数据。

• 用方差分析来确认哪种原料对口味的影响大。

• 通过回归分析来了解胶卷的感光速率与存放时间的关系(成反比)，通过回归分析确切知道了每月下降 7.6 个单位。

• 通货膨胀对生产和生活都产生不利影响，统计学通过编制价格指数的方法来测量通货膨胀的高低。

• 一家私人诊所被火烧毁，保险公司利用统计预测对重建期间的收入损失给予了赔偿。

• 某化学公司利用统计技术对其产品生产进行质量控制，每年可节约几十万美元。

1.1.3 统计学的研究对象

统计学的研究对象是大量现象的数量方面的总体特征，即数量总体。如人体身高的特征，居民收入水平和离散程度，人口性别比例，产品不合格率等。这些数量总体都是由数据集来表现的。

需要强调的是，统计学的研究对象有三大特点：大量性、同质性和差异性。也就是说，我们要研究某种现象的特征或变化规律性，就要对其进行大量观察，获得足够多的数据，并且，这些数据又不能来自异质总体，否则就失去代表性，用无代表性的数据研究问题无法得出正确的结论。虽然我们用了大量数据，这些数据也来自同一总体，但是每个数据都没有差异性，也无统计学上的研究意义。

1.1.4 描述统计和推断统计

统计数据的分析是统计学的核心内容，它是通过统计描述和统计推断的方法探索数据内在规律的过程。

描述统计学研究如何取得反映客观现象的数据，并通过图表形式对所收集的数据进行加工处理和显示，进而通过综合、概括与分析得出反映客观现象的规律性数量特征。内容包括统计数据的收集方法、数据的加工处理方法、数据的显示方法、数据分布特征的概括与分析方法等。例如，对某产品重量进行抽样调查，抽得样本的 4 个数据 8、5、6、6 公斤，通过计算得到其总和 25 公斤以及平均值 6.25 公斤，这个过程就是统计描述。

推断统计学则是研究如何根据样本数据去推断总体数量特征的方法，它是在对样本数据进行描述的基础上，对统计总体的未知数量特征作出以概率形式表述的推断。在前一个例子中，我们用样本平均值 6.25 公斤来推断全部产品的平均重量为 6.25 公斤时，这个过程就是推断统计。

推断统计学的研究过程如图 1－1 所示。

描述统计是整个统计学的基础，推断统计则是现代统计学的主要内容。在对现实问题的研究中，由于所获得的数据主要是样本数据，要认识总体特征就必须进行推断分析。因此，推断统计在现代统计学中的地位和作用越来越重要，已成为统计学的核心内容。

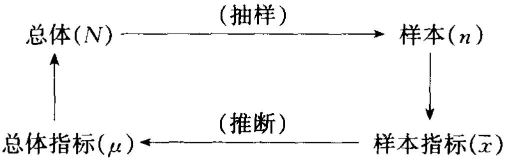


图 1－1 推断统计学的研究过程

1.1.5 统计学的分科及其与其他学科的区别

统计学可分为理论统计学和应用统计学。

理论统计学是指统计学的数学原理。在统计研究领域，从事理论统计学研究的是少数，多数则是从事应用统计学的研究。统计方法的应用几乎扩展到了所有的科学研究领域。例如，统计方法在管理领域的应用形成了管理统计学，在社会学研究和社会管理中的应用形成了社会统计学，在人口学中的应用形成了人口统计学，等等。

数学研究抽象的数，统计学研究客观现象的数量特征和数量关系。

统计方法可以帮助其他学科探索学科内在的数量规律性，它仅仅是一种有用的、定量分析的工具，它不是万能的，不能解决你想要解决的所有问题，但统计方法在各学科的研究中会发挥越来越重要的作用。

1.2 统计学的基本知识

1.2.1 总体和个体

总体是统计总体的简称，分为全极总体和样本总体。全极总体就是我们的研究对象，如对某产品的重量进行调查时，全部产品就是一个全极总体，其个体数记为 N。如果我们进行的不是全面调查，而是抽样调查，所抽出的数据个体数称为样本容量，记为 n。由样本容量为 n 的样本数据构成的总体称为样本总体。抽得样本容量为 4 的数据分别为 8、5、6、6 公斤，通过计算得到其总和 25 公斤以及平均值 6.25 公斤。这个样本平均数记为 $\bar{x}$。用样本平均数 $\bar{x}=6.25$ 公斤推断全极总体(N)的平均数 μ 时，就认为全部产品的平均重量为 6.25 公斤，即 $\mu=6.25$。

1.2.2 统计数据的类型

统计数据是统计研究的前提和基础。数据的计量尺度分为定类尺度、定序尺度、定距尺度和定比尺度。

(1) 定类尺度：按照性别将人口分为男、女两类；按照经济性质将企业分为国有、集体、私营、混合制企业等。

(2) 定序尺度：产品可以分为一等品、二等品、三等品、次品等；考试成绩可以分为优、良、中、及格、不及格等。

（3）定距尺度：收入用人民币“元”度量、考试成绩用“百分制”度量、重量用“克”度量、长度用“米”来度量等。

（4）定比尺度：GDP 比上年增长了 8%。

对不同事物，我们能够予以计量或测度的程度不同，比如，人口的性别和产品质量等级就无法用比较精确的数字加以计量，我们称之为定性数据。这样，统计数据大体上分为两种类型：定性的数据和定量的数据。

定性数据也称品质数据，它说明的是事物的品质特征，是不能用数值表示的，其结果通常表现为类别，如房屋编号、质量等级等。

定量数据也称数量数据，它说明的是现象的数量特征，是能够用数值来表现的，如房屋租金、房屋面积等。

1.2.3 变量

在统计研究中，把能够说明现象某种特征的统计数据称为变量。如房屋面积、房屋价格、房屋编号等都是变量。如果一个变量是由品质数据来记录的，称为品质变量，如“性别”就是品质变量，它表现为“男”或“女”；“产品等级”也是个品质变量，它可以表现为“一等品”、“二等品”、“三等品”、“次品”等。如果一个变量是由数量数据来记录的，称为数量变量或数字变量，如“产品产量”、“商品销售额”、“零件尺寸”、“年龄”、“时间”等都是数字变量，它们可以表现为不同的数值。

数字变量根据其取值的不同，可以分为离散变量和连续变量。

离散变量只能取有限个值，而且其取值都以整位数断开，可以一一列举，如“企业数”、“产品数量”、“房屋个数”等就是离散变量。

连续变量可以取无穷多个值，其取值是连续不断的，不能一一列举，如“年龄”、“温度”、“零件尺寸”、“房屋面积”和“租金”等都是连续变量。

1.2.4 统计指标及其形式

统计数据经过加工处理后表现为统计指标。一个完整的统计指标应该包括指标名称、数值、计量单位、时间限制、空间限制和计算方法等 6 个要素。如 2001 年中国国内生产总值为 95 900 亿元，其中：（1）指标名称为“国内生产总值”；（2）数值为“95 900”；（3）计量单位为“亿元”；（4）时间限制为“2001 年”；（5）空间限制为“中国”；（6）计算方法为“SAN 核算体系”。

统计指标表现为绝对数、相对数和平均数等三种形式。

绝对数是统计数据的基本表现形式，现象的总体规模和水平一般都以绝对数形式表现。比如，一个地区的总人口、国民生产总值、商品零售额等都是绝对数。

绝对数按其所反映的时间状况不同可以分为时期数和时点数。时期数是反映现象在一段时期内的总量，如产品产量、产值、出生人口数等。时期数的特点是可以连续计数，并可以累积。时点数是反映现象在某一瞬间时刻上的总量，如人口数、股票价格和股票价格指数、企业的固定资产价值等。由于时点数是反映现象在某一瞬间点上的水平，因而只能间断计数，各时点数不能累积。

统计的原始数据都有一定的计量单位。绝对数的计量单位有实物单位、价值单位和复合

单位三种。实物单位是根据事物的自然属性和特点，采用自然单位或度量衡单位来计量的，如人口数以人为单位，汽车以辆为单位，粮食以吨或千克为单位，等等。价值单位是以货币形式对现象进行度量，如国民生产总值、商品销售额、生产成本和利润，等等。复合单位则是由两种计量单位复合而成的，如货物周转量以"吨公里"为计量单位，劳动生产率以"元/人"，等等。

统计绝对数是其他指标形式形成的基础。

相对数是两个绝对数的比值，反映事物的相对数量。

根据所对比的数量不同，相对数可分为比例和比率两种基本形式。

比例是一个总体中各个部分的数量占总体数量的比重，通常用于反映总体的构成或结构。假定总体数量 N 被分成 X 个部分，每一部分的数量分别为 N_1，N_2，…，N_k，则比例定义为 N_i/N。比如，我们将全部人口分为男、女两部分，男性所占比重就是比例相对数。显然，各部分的比例之和等于 1。

用男性人口数比女性人口数，则是人口统计中的性别比，属于比率相对数。比率是各不同类别的数量的比值。各比率之和不等于 1。比率也可以是同一现象在不同时间或空间上的数量之比，如将今年的国民生产总值与去年的国民生产总值进行对比，可以得到经济增长率；将一个地区的国民生产总值同另一个地区的国民生产总值进行对比，反映两个地区的经济水平差异。成数、百分数和千分数是相对数的常用计量单位。

1.2.5 统计数列

统计数列是将数据按照一定秩序排列所得到的变量数列，可分为动态数列和静态数列。

动态数列是将某指标的各数据按照时间顺序进行排列得到的数列。如某地区国民生产总值的增加值在 1999 年至 2001 年分别为 3 420 万元、3 694 万元和 4 063 万元。

静态数列是将某同时期的各指标数值按照组别进行排序得到的数列。如 2001 年某地区 A、B、C 3 县国民生产总值的增加值分别为 1 133 万元、1 250 万元和 1 680 万元。

【本章小结】

统计学是关于统计数据的搜集、整理分析的科学和艺术。统计学以现象的数量总体作为研究对象，通过描述统计来了解现象总体的分布特征，通过推断统计来实现用样本特征观察总体特征的目的。把能够说明个体现象的某种特征的统计数据称为变量。统计数据经过汇总或加工后表现为统计指标。将统计数据按照一定秩序排列可得到变量数列或统计数列。

练习 1

1 如何理解统计？

2 管理统计学是怎样的学科？

3 统计数据与统计研究的关系如何？

4 管理统计学研究的对象是什么？

5 管理统计学的核心内容是什么？

6 描述统计学是如何研究现象总体的？

⑦推断统计学是如何研究现象总体的?
⑧试说明描述统计学和推断统计学的关系。
⑨数据的计量尺度有几种?
⑩什么是定性数据? 什么是定量数据?
⑪什么是变量?
⑫什么是品质变量? 什么是数量变量?
⑬什么是离散变量? 什么是连续变量?
⑭数据分为哪三大指标形式?
⑮什么是绝对数?
⑯什么是时期数? 什么是时点数?
⑰绝对数的计量单位有哪三种?
⑱举例说明实物单位、价值单位和复合单位。
⑲什么是相对数? 它与绝对数是什么关系?
⑳什么是比例相对数? 什么是比率相对数?
㉑什么是数列? 为什么分为动态数列和静态数列?
㉒表 1－1 至表 1－3 中的变量有哪些?

表 1－1 某饭店前景展望调查表

前景展望	频数	百分比
不乐观	10	56%
乐观	8	44%
合计	18	100%

表 1－2 2001 年某市房屋面积和房屋售价的资料

房屋面积	售价	房屋面积	售价	房屋面积	售价
521	26	825	38	1 047	43.6
661	31	883	39.6	1 060	44.8
694	37.4	920	31.2	1 079	40.6
743	34.8	965	37.2	1 164	41.8
787	39.2	1 011	38.4	1 298	45.2

表 1－3 某公司 10 名员工的工龄和工资的样本数据

工龄(年)	4	4	5	6	7	8	8	9	9	10
年工资(百元)	120	160	200	300	240	280	340	320	400	440

表 1－4 饮料销售量与库存量在各年的变化情况

年份	销售量(箱)	年末库存(箱)	平均库存(箱)	周转速度(次)
1997	—	350	—	—
1998	1 710	400	375	4.6
1999	2 110	550	475	4.4
2000	3 310	800	675	4.9
2001	4 020	950	875	4.6

㉓表 1－1 至表 1－4 中的动态数列和静态数列分别是哪个？

㉔表 1－3 中的总体是什么？总体中的个体有多少？有几个变量？

㉕表 1－4 中的变量有几个？指标有哪些？

㉖举出你生活中熟悉的例子，说明现象的量、数、值之间的关系。

㉗定类尺度、定序尺度、定距尺度、定比尺度有哪些不同？

㉘什么叫总体和总体单位？总体有哪些特征？什么是有限总体？什么是无限总体？

㉙试指出下列指标是总量指标(时期指标或时点指标)还是相对指标(具体哪一种相对数)？

(1) 外汇储备额；

(2) 人均住房面积；

(3) 国民收入积累与消费比；

(4) 资金周转速度；

(5) 旅游入境人数；

(6) 居民银行存款余额；

(7) 劳动生产率；

(8) 商品库存额；

(9) 恩格尔系数；

(10) 资金利润率。

2 数据的收集和整理

学习目标 本章学习数据的收集和汇总方法。重点要掌握统计调查的内容、数据汇总的步骤和简单统计分析的要点等。

2.1 数据的收集

2.1.1 数据来源渠道

统计数据最初都是来源于直接的调查或试验，这是统计数据的直接来源，称之为原始数据或第一手数据或直接数据。如果统计数据来源于别人调查或别人试验的数据，这是统计数据的间接来源，就称为第二手数据或间接数据。

统计数据的直接来源主要有两个渠道：一是专门组织的调查，二是科学试验。科学试验是取得自然科学数据的主要渠道，专门组织的调查则是取得社会经济数据的重要渠道。

专门调查中常用的调查方式主要有普查、抽样调查、统计报表等。其中抽样调查是我国目前最常用的调查方式。

2.1.2 普查和抽样调查

普查是为某一特定目的而专门组织的一次性全面调查，如人口普查、工业普查、农业普查等。世界各国一般都定期地进行各种普查，以便掌握有关国情、国力的基本统计数据。普查是适合于特定目的、特定对象的一种调查方法，它主要用于搜集处于某一时点状态上的社会经济现象的数量，目的是掌握特定社会经济现象的基本全貌，为国家制定有关政策或措施提供依据。普查的特点是：第一，普查通常是一次性的或周期性的。由于普查涉及的面广、调查单位多，需要耗费大量的人力、物力、财力和时间，一般需要间隔较长的时间进行一次，比如每隔 10 年进行一次。第二，普查一般需要规定统一的标准调查时间，以避免调查数据的重复或遗漏，保证普查结果的准确性。如我国前四次人口普查的标准时间定为普查年份的 7 月 1 日 0 时。第三，普查的数据一般比较准确，规范化程度也较高，因此，它可以为抽样调查或其他调查提供基本的依据。第四，普查的适用对象比较狭窄，只能调查一些最基本、最一般的现象。

抽样调查是实际中应用最广泛的一种调查方法，这里指的是概率抽样，它是从调查对象的总体中随机抽取一部分单位作为样本进行调查，并根据样本调查结果来推断总体数量特征的一种非全面调查方法。抽样调查的特点是：第一，经济性。样本单位通常很小，可以节省大量的人力、物力、财力，调查费用较低。第二，时效性高。抽样调查可以迅速、及时地获得所需要的信息。由于工作量小，抽样调查可以频繁地进行。第三，适应面广。抽样调查可用于调查全面调查能够调查的现象，也能调查全面调查所不能调查的现象，特别是适合对一

些特殊现象的调查。从调查的项目和指标来看，抽样调查的内容和指标可以更详细、深入，能获得更全面、更广泛的数据。第四，准确性高。由于工作量小，可使各环节的工作做得更细致，误差往往很小。当然，用样本数据去推断总体时，不可避免地会有推断误差，但这种误差的大小是可以计算并控制的，因此推断的结果通常是可靠的。

2.1.3 调查方案

任何调查方式都要设计调查方案。调查方案是指导整个调查过程的纲领性文件，其内容包括调查目的、调查对象和调查单位、调查项目和调查表等内容。

（1）调查目的。调查目的是调查所要达到的具体目标，它所回答的是"为什么调查，要解决什么样的问题"。

（2）调查对象和调查单位。简单说来，调查对象就是总体，调查单位就是个体。调查对象和调查单位所解决的是"向谁调查，由谁提供所需数据"的问题。调查对象是根据调查目的确定的调查研究的总体。调查单位是构成调查对象中的每一个单位(个体)，它是调查项目和指标的承担者或载体，是我们搜集数据、分析数据的基本单位。例如，我们要取得某地区工业企业产品产量、产值等方面的数据，调查对象是该地区的所有工业企业，而调查单位就是构成工业企业这个总体的每一个企业。在市场调查中，基本上都是采取抽样调查方式，调查对象是我们确定抽样框(如编号)的基本依据，在确定抽样框后，从中选取的每一个样本单位就是我们的调查单位。

（3）调查项目和调查表。简单说来，调查项目就是变量。这里所要回答的是"调查什么"的问题。调查项目是调查的具体内容，它可以是调查单位的数量特征，如一个人的年龄、收入，一个企业的产品产量、产值等；也可以是调查单位的某种属性或品质特征，如一个人的性别、职业，一个企业所属的行业类别等。在大多数统计调查中，调查项目通常以表格的形式来表现，称为调查表，它是用于登记调查数据的一种表格，一般由表头(名称)、表体(项目)和表外附加(填表人等)三部分组成。在市场调查中，调查项目和调查表通常表现为一张调查问卷。

（4）其他内容。调查方案中还应明确调查所采用的方法、调查时间、调查组织和实施的具体细则。

2.1.4 收集数据的方法

在统计调查中，应明确是采用访问调查、邮寄问卷调查、电话调查还是其他方式等。

（1）访问调查。它是调查者与被调查者通过面对面地交谈从而得到所需资料的调查方法。访问调查的方式有标准式访问和非标准式访问两种。非标准式访问的调查人员只是给一个题目或提纲，由调查人员和受访者自由交谈，以获得所需的资料。

（2）邮寄调查。它通过邮寄或其他方式将调查问卷送至被调查者，由被调查者填写，然后将问卷寄回或投放到指定收集点的一种调查方法，是一种标准化调查。

（3）电话调查。它是调查人员利用电话同受访者进行语言交流，从而获得信息的一种调查方式。电话调查具有时效快、费用低等特点。用于电话调查的问题要明确，问题数量不宜过多。

（4）座谈会。它是将一组受访者集中在调查现场，让他们对调查的主题(如一种产品、

一项服务或其他话题等)发表意见，从而获取调查资料的一种方法。参加座谈会的人数不宜太多，讨论方式主要取决于主持人的习惯和爱好。这要求主持人尽可能多地引导受访者说出他们的真实意见或想法。座谈会属于定性方法，它通常围绕一个特定的主题取得有关定性资料，不是对研究总体数量特征的推断；定量方法是从总体中按随机方式抽取样本取得资料，其研究结果或结论可以进行推论。

一些饭店利用调查问卷来观察和研究有关顾客对食物质量、服务、气氛等的意见。长城饭店使用的调查表(见图 2－1)要求客户对“食物质量”、“服务友好”、“服务快捷”、“清洁程度”和“管理意见”等 5 个变量给出“极好”、“好”、“满意”和“不满意”等 4 类意见，依此作为提高饭店经营质量的决策基础。

我们很高兴您在长城饭店停留并想确信您是否将会再次光临。因此，如果您有一点时间，如果您填写这张卡片的话，我们将衷心感谢。您的意见和建议对我们极其重要。谢谢！

服务员姓名或服务号____________________

	极好	好	满意	不满意
食物质量	☐	☐	☐	☐
服务友好	☐	☐	☐	☐
服务快捷	☐	☐	☐	☐
清洁程度	☐	☐	☐	☐
管理意见	☐	☐	☐	☐

____

____

你会多迅速访问我们____

____

请投入门口的建议箱内。谢谢！

图 2－1 长城饭店调查问卷

2.2 数据汇总方法

2.2.1 数量数据汇总方法

数据汇总对统计分析和经营决策非常重要。例如，高露洁—棕榄公司在对家用洗涤产品的质量控制中很好地利用了统计学。该公司在营销方面的一个焦点是客户对盒装清洁剂的数量的满意度。每一类尺寸的盒子都要求填充相同重量的清洁剂，但是清洁剂的容量受其清洁粉密度的影响。如果清洁粉的密度超过 0.4，就定为质量不合格品。为了对清洁粉的密度的可接受范围加以限制，就要定期抽取统计样本，测量每一样本的密度。在某一检查期间采集了 150 个样本，其密度频数分布如表 2－1 所示。结果表明，密度水平高于 0.40 的比重为 0，说明经营符合质量标准。否则，公司将采取改进行动。

在频数分布表形成之前，数据是杂乱无章的。数据汇总就是把原始数据加工为有序的分组数据的过程。对于连续变量情况下，要采用组距分组。采用组距分组需要经过分组、确定组限和次数分配等几个步骤。

表 2－1 清洁粉的密度数据的频数分布

密度	频数	频率
0.29～0.30	30	0.200
0.31～0.32	75	0.500
0.33～0.34	32	0.213
0.35～0.36	9	0.060
0.37～0.38	3	0.020
0.39～0.40	1	0.007
总计	150	1.00

例 2－1 某公司销售人员的车辆运营费用过高，其中主要的为汽油费用。现收集到前几个月花在车辆上的费用，分析汽油的成本花费后，再分析一下汽车的型号、司机及行车路线等因素。已知样本数据(单位：公里/升)如下：

27，29，33，21，21，12，16，25，8，17，14，34，38，15，19，19，41

首先，确定组数。组数的确定应能使数据的分布呈现一个峰态，一般不少于 3 组和不多于 15 组。在实际分组时，可以先按斯特格斯(Sturges)提出的经验公式来确定组数 K：

$$K = 1 + \lg N / \lg 2$$

其中 N 为数据的个数。例如，对本例的数据有 $K = 1 + \lg 17 / \lg 2 = 5.08$，即应分为 5 组。

其次，确定组距。组距是一个组的上限与下限的差，可根据全距(全部数据的最大值和最小值之差)及所分的组数来确定，即组距＝(最大值－最小值)/组数。例如，对于本例的数据，最大值为 41，最小值为 8，则组距＝(41－8)/5 ＝ 6.6。为便于计算，组距宜取 5 或 10 的倍数。如果取 5，则有组数＝全距/组距 ＝(41－8)/5 ＝ 6.6，可取 7 组。

第三，确定组限和进行次数分配。第一组的下限应小于原始数据中的最小值 8，为了计算方便取 5。依此分组为 5～10，10～15，15～20，…，可得到组数为 8 的频数汇总表，见表 2－2。

表 2－2 车辆运营费用频数(次数)汇总表

单位汽油行驶路程(公里/升)	汽车车辆次数分配	频数	频率	向上累积频数	向上累积频率
5～不足 10	/	1	0.058 8	1	0.058 8
10～不足 15	/	1	0.117 6	3	0.176 5
15～不足 20	////	4	0.235 3	7	0.411 8
20～不足 25	////	4	0.235 3	11	0.647 1
25～不足 30	///	3	0.117 6	13	0.764 7
30～不足 35	//	2	0.117 6	15	0.882 4
35～不足 40	/	1	0.058 8	16	0.941 2
[40，45)	/	1	0.058 8	17	1.000 0
合计	—	17	1.000 0	—	—

从变量值小的一方向变量值大的一方累加频数，称为向上累积；从变量值大的一方向变量值小的一方累加频数，称为向下累积。

第四，绘制统计图。统计图用柱形图绘制，如图 2-2 所示。

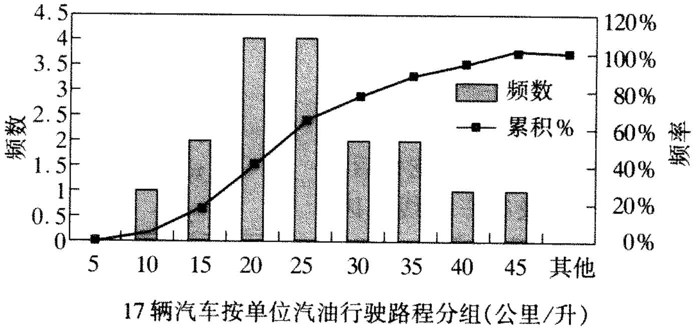


图 2-2　17 辆汽车单位汽油公里数柱形图

第五，分析。从全距数据得知，该公司销售人员的车辆每升汽油行驶公里数最高为 45（原始数据最高为 41），最低为 5(原始数据最低为 8)，全距为 40(原始数据全距为 33)。其中有 8 辆大于 15 和小于 25，约占 47%；有 7 辆低于 20，约占 41%。对低于 20 的 7 辆(占 41%)应加强管理，降低其车辆运营费用。

等距分组由于各组的组距相等，各组频数的分布不受组距大小的影响，而不等距分组因各组组距不同，各组频数的分布受组距大小不同的影响。因此，为消除组距不同对频数分布的影响，需要计算频数密度，即频数密度 = 频数/组距，用频数密度才能准确反映频数分布的实际状况。

此外，组距分组掩盖了各组内的数据分布状况，为反映各组数据的一般水平，通常用组中值作为该组数据的一个代表值，即：组中值 =（下限值 + 上限值)/2。但以组中值作为代表值有一个必要的假定条件，即各组数据在本组内呈均匀分布或在组距中值两侧呈对称分布。

2.2.2　品质数据汇总方法

对品质数据分组有一定的主观性，这也是困难之处。例如，对某饭店进行了前景展望的问卷调查，所得顾客的原始资料如表 2-3。

表 2-3　饭店前景展望的问卷调查原始资料

问卷序号	前景展望	店主类型	问卷序号	前景展望	店主类型
1	6	3	10	4	2
2	4	1	11	3	1
3	4	1	12	1	1
4	2	—	13	1	—
5	1	3	14	5	3
6	3	1	15	1	1
7	3	3	16	2	1
8	4	2	17	3	3
9	5	3	18	4	3

“前景展望”和“店主类型”都属于品质数据。

前景展望序列的“1”至“6”表示：1＝“极不乐观”，…，6＝“极乐观”。

店主类型分别为：“独资”、“合伙”、“股份制”、其他。

对“前景展望”的汇总结果如表2－4和图2－3。

表2－4 饭店前景展望频数分布表

前景展望	频数	频率
1	4	22%
2	2	11%
3	4	22%
4	5	28%
5	2	11%
6	1	6%
合计	18	100%

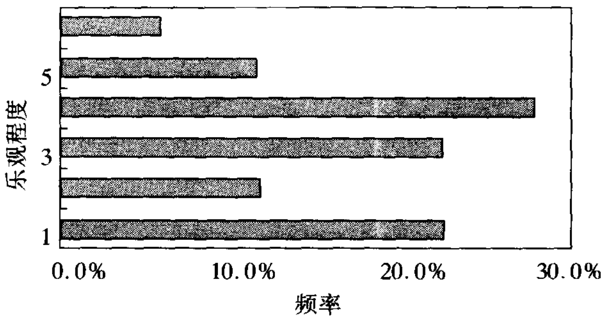


图2－3 饮食业调查条形图

以上由于分组过细，不利于得出分析的结论，可将组数减少为“不乐观”和“乐观”两组，结果如表2－5。

表2－5 饭店前景展望调查表

前景展望	频数	频率
1～3(不乐观)	10	56%
4～6(乐观)	8	44%
合计	18	100%

可见，不乐观者出现的频率超过乐观者12个百分点。

为了进一步分析饭店前景是否与店主风格有关，把店主类型加入表中，编制列联表表2－6，绘制柱形图如图2－4。

表 2－6 饭店业调查

前景展望	独资	合伙	股份制	其他	合计
1～3(不乐观)	71%	0%	43%	100%	56%
4～6(乐观)	29%	100%	57%	0%	44%
合计	100%	100%	100%	100%	100%

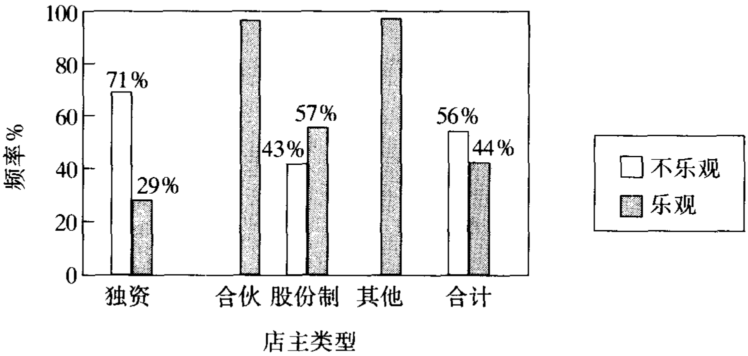


图 2－4 饭店调查柱形图

统计分析：对饭店前景不乐观者居多，其中，独资企业中有 71% 不乐观；合伙企业都是乐观者；股份制企业中有 43% 不乐观。

2.2.3 双变量相关关系和散点图

在决策中，经理们通常更关心两个变量的相互关系。表 2－7 给出了房屋面积和房屋售价的数据。

表 2－7 房屋面积和房屋售价的资料

房屋面积(m^2)	售价(万元)	房屋面积(m^2)	售价(万元)	房屋面积(m^2)	售价(万元)
521	26	825	38	1 047	43.6
661	31	883	39.6	1 060	44.8
694	37.4	920	31.2	1 079	40.6
743	34.8	965	37.2	1 164	41.8
787	39.2	1 011	38.4	1 298	45.2

一个变量增大，另一个变量是否也增大？只从原始统计表中不太容易了解，需要绘制散点图。从散点图(见图 2－5)可以得知，售价随着面积的增大而上升。

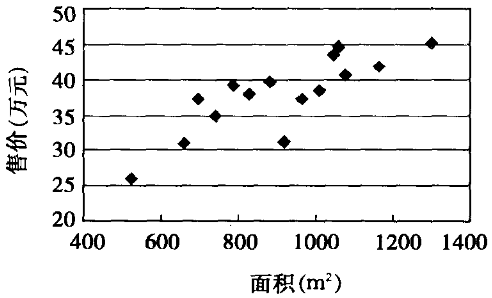


图 2－5 房屋面积和售价的关系

【本章小结】

统计数据分为第一手数据(原始数据)和第二手数据。通过普查、抽样调查等组织方式可以搜集到第一手数据。数据之间存在某种规律，可以使用适当的汇总方法了解其分布特征，并可用图的形式表现出来，为进行深入的统计分析打下基础。

练习 2

1 统计数据的来源主要有哪两种渠道?

2 普查和抽样调查各有什么特点?

3 设计调查方案主要考虑哪些内容?

4 如何理解调查对象和调查单位的关系?

5 设计一张简单的商业问卷。

6 数据汇总有什么作用?

7 如何进行数据汇总?

8 已知某商品连续 20 天的销售量如下：26，34，21，32，42，36，28，38，17，39，22，12，56，39，25，41，30，23，27，19。试编制频数分布表和绘制直方图，并进行简单的统计分析。

9 “前景展望”和“店主类型”都属于什么类型的数据? 怎样用它们绘制列联表?

10 已知收集到工龄和工资的样本数据如下：

工龄(年)	4	4	5	6	7	8	8	9	9	10
年工资(百元)	120	160	200	300	240	280	340	320	400	440

要求绘制散点图，并说明两者的相互关系。

11 有 20 个工人看管的机器台数资料如下：2、2、5、4、2、4、3、4、3、4、4、2、4、3、4、5、3、4、4、3，试根据资料编制分布数列。

12 对 50 只灯泡的耐用时数进行测试，所得数据如下(单位：小时)：

886	928	999	946	950	864	1050	927	949	852
1027	928	978	816	1000	918	1040	854	1100	900

866	905	954	890	1006	926	900	999	886	1120
893	900	800	938	864	919	863	981	916	818
946	926	895	967	921	978	821	924	651	850

要求：

（1）试根据上述资料编制次(频)数分布数列；

（2）编制向上和向下累计频数、频率数列；

（3）根据所编制的次数分布数列绘制直方图、折线图与曲线图；

（4）根据所编制的累计频数、频率数列绘制累计曲线图；

（5）根据累计曲线图，指出灯泡耐用时数在 1 000 小时以上的有多少，占多大比重？灯泡耐用时数在 900 小时以下的有多少，占多大比重？

（6）根据频数分布曲线图说明灯泡耐用时数的分布是属于哪一种类型？

⑬已知一组 15 名工人的资料如下：

工人编号	性别	年龄	文化程度	技术级别
1	男	52	文盲	6
2	男	30	初中	3
3	男	19	初中	2
4	男	46	高中	4
5	女	47	小学	4
6	男	34	小学	2
7	女	22	初中	3
8	男	31	高中	5
9	男	55	高中	3
10	男	32	初中	5
11	女	49	中专	4
12	男	34	初中	4
13	男	34	初中	4
14	男	61	技工	7
15	男	36	初中	4

要求：

（1）按性别和文化程度分别编制品质数列；

（2）按技术级别编制单项式数列；

（3）以组距为 10，20 岁以下、60 岁以上各为一组，按年龄编制组距式数列。

3 数据特征的描述

学习目标 本章学习数据分布的集中趋势特征和离中趋势特征的描述方法。重点要掌握众数、中位数、均值、标准差、标准差系数和相关系数等指标的计算和应用问题。

3.1 描述统计

3.1.1 描述统计

描述统计的内容也包括频数分布，但主要是关于集中趋势和离中趋势的描述问题。在频数分布中，我们无法了解数据集中程度(中心位置)和离散程度(偏差)，而在经营管理中，了解数据分布的集中趋势和离中趋势特征非常重要。例如，BND医院为了制定一个收容计划，工作人员搜集了有关病人被工作组收容的时间的数据，一个含有67个病人记录的样本表明了病人被收容的时间在1～185天内是如何变化的。下面的统计数据就提供了有关收容时间的有价值的信息。

平均数：35.7天　　中位数：17天　　众 数：1天

平均数表明了对病人的平均收容时间是35.7天，也就是1个月多一点。而中位数则表明半数病人的收容时间在17天以下，半数病人的收容时间在17天以上。众数是发生频数最多的数据值，众数为1天则表明了许多病人仅仅被收容了短短的1天。利用这些信息，可以提高制定收容计划的科学性。

在日常生活和经济管理中，常见的频数分布曲线主要有正态分布、偏态分布、J形分布、U形分布等几种类型。在实际调查中，常常遇到适度的偏态分布，如病人被收容的时间分布就是偏态分布，还有J形分布和U形分布。J形分布有正J形和反J形两种，如经济学中供给曲线，随着价格的提高供给量以更快的速度增加，呈现为正J形；而需求曲线则表现为随着价格的提高需求量以较快的速度减少，呈现为反J形。U形分布的特征是两端的频数分布多，中间的频数分布少，比如，人和动物的死亡率分布就近似服从U形分布，因为人口中婴幼儿和老年人的死亡率较高，而中青年的死亡率则较低，动物的死亡也是如此，生产的故障率也有类似的分布。正态分布是一种对称的钟形分布，有很多现象服从这种分布，如农作物的单位面积产量、零件的公差、纤维强度等都服从正态分布。

3.1.2 集中趋势和离中趋势

我们可以从两个方面对正态分布的特征进行描述：一是数据分布的集中趋势，二是数据分布的离散程度。测算数据分布集中趋势特征的方法主要有众数法、中位数法和均值法；测算离散程度的方法主要有全距法、四分位差法、标准差法、标准差系数法等。

3.2 正态分布特征的描述

3.2.1 众数、中位数、四分位数和均值

众数是一组数据中出现次数最多的变量值。从分布的角度看，众数是具有明显集中趋势点的数值，一组数据分布的最高峰点所对应的数值即为众数，记为 M_o。在表 3-1 中，最高频数为 11，其对应的变量值为 30，则有

$$M_o = 30$$

众数是一组数据中心位置的一个代表值。当然，如果数据的分布没有明显的集中趋势或最高峰点，众数也可以不存在；如果有多个高峰点，实际上也可以认为有多个众数。

表 3-1 集中趋势和离中趋势计算表

变量 x	频数 f	频率 $f/\sum f$	向上累计频数	向上累计频率	变量×频数 xf	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2 f$
5	1	1.70%	1	1.70%	5	-25	625
10	2	3.40%	3	5.10%	20	-20	800
15	4	6.80%	7	11.90%	60	-15	900
20	7	11.90%	14	23.70%	140	-10	700
25	10	16.90%	24	40.70%	250	-5	250
30	11	18.60%	35	59.30%	330	0	0
35	10	16.90%	45	76.30%	350	5	250
40	7	11.90%	52	88.10%	280	10	700
45	4	6.80%	56	94.90%	180	15	900
50	2	3.40%	58	98.30%	100	20	800
55	1	1.70%	59	100.00%	55	25	625
合计	59	100%	—	—	1 770	—	6 550

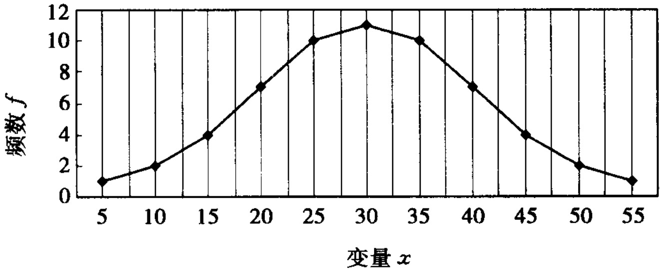


图 3-1 正态分布图

中位数是一组数据按大小排序后，处于正中间位置上的变量值。显然，中位数将全部数

据等分成两部分，一部分数据比中位数大，另一部分则比中位数小。与众数类似，中位数也是一个位置代表值，记为 M_e。

根据未分组数据计算中位数时，要先对数据进行排序，然后确定中位数的位置，其公式为：中位数位置 = $(N+1)/2$。式中的 N 为数据的个数。在表 3－1 中的中位数排序在第 $(59+1)/2=30$位，处在累积频数为 35 或累积频率为 59.30% 所对应的变量值，即 30，则有

$$M_e = 30$$

中位数可以把全部数据分为各占 50% 的对称性两部分，把对称的两部分再分割为各占 25% 的四部分。用 Q_1、Q_2 和 Q_3 分别表示把全部数据分割为各占 1/4 的四个部分的三个等分点，分别称为第一分位数、第二分位数和第三分位数，其中 Q_2 就是中位数。

均值是全部数据的算术平均值，也称为算术平均数，记为 $\bar{x}$。它是把全部变量值加总后用总体单位总数来除。在本例中是分组数据，其计算公式为加权式算术平均数，即

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 + \cdots + x_Nf_N)/(f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_N) \\ &= \sum xf / \sum f = 1770/59 = 30\end{aligned}$$

式中，$\bar{x}$ 表示算术平均数，x_i 表示变量值，f_i 表示权数。

以上用众数、中位数和均值来测算在正态分布下的集中趋势特征，其结果完全一致，都等于 30。

3.2.2 全距、四分位差、标准差和标准差系数

全距等于数据分布中最大值与最小值之差，记为 R。本例中 $R=55-5=50$。

四分位差等于第 3 个四分位数(Q_3)与第 1 个四分位数(Q_1)之差，记为 RQ。则有

$$\mathrm{RQ} = Q_3 - Q_1$$

四分位差等于处在中间部分占 50% 的数据之间的差距。在本例中，$\mathrm{RQ} = Q_3 - Q_1 = 35-25=10$。

与全距相比，四分位差不受极端值的影响，对数据分布的离散趋势的描述比较客观，但中间部分数据的离散状况也无法反映出来。

标准差是平均差的一种发展。把每个变量值都与均值计算差距(取离差绝对值)后再对之进行加权平均就是平均差。为了省去取绝对值的计算麻烦，就用标准差来替代平均差。

标准差等于离差平方平均数的平方根，记为 σ，则有

$$\sigma = \sqrt{\sum(x-\bar{x})^2 f/\sum f} = \sqrt{6550/59} = 10.54$$

标准差等于 10.54，表明数据离散平均距离为 10.54。

由于标准差受计量单位大小的影响，还受到数据均值水平的影响，所以，要排除这些影响，就要计算反映相对离散程度的指标。变异系数就是反映数据分布相对离散程度的常用指标。它等于标准差除以均值记为 V，则有

$$V = \sigma/\bar{x} = 10.54/30 = 0.3513$$

反映数据分布的两大数量特征就是均值和标准差。但在比较表 3－2 所列 A、B、C 三组数据的离散程度时，标准差系数发挥着重要作用。利用标准差系数对以下 A、B、C 三组数据的分布状况进行比较有：

表 3-2　A、B、C 三组数据分布状况比较

A 组		B 组		C 组	
X_A	f_A	X_B	f_B	X_C	f_C
5	1	5	1	25	1
10	2	10	1	30	2
15	4	15	3	35	4
20	7	20	7	40	7
25	10	25	11	45	10
30	11	30	13	50	11
35	10	35	11	55	10
40	7	40	7	60	7
45	4	45	3	65	4
50	2	50	1	70	2
55	1	55	1	75	1
合计	59	合计	59	合计	59

$\bar{x}_A = 30$　　$\bar{x}_B = 30$　　$\bar{x}_C = 50$

$\sigma_A = 10.54$　　$\sigma_B = 9.52$　　$\sigma_C = 10.54$

$V_A = 0.3513$　　$V_B = 0.3173$　　$V_C = 0.2108$

由于 $V_A > V_B > V_C$，所以 A 组的相对离散程度最高，C 组最低。从图 3-2 中可以直观了解到 A、B、C 三组的分布状况。

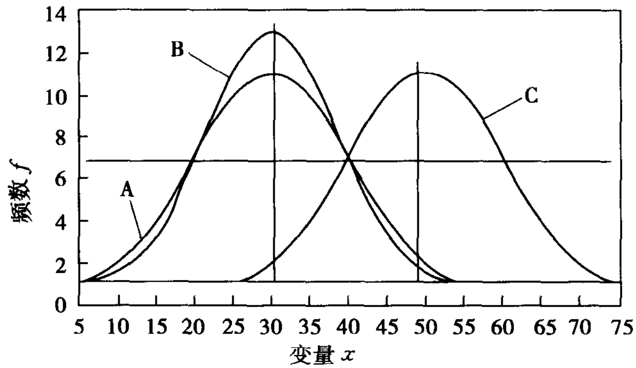


图 3-2　三组分布状况比较

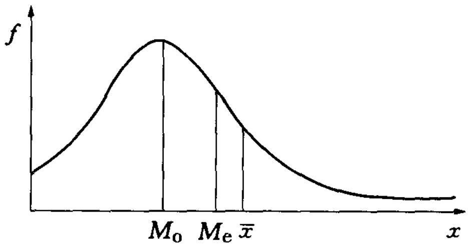
3.3　偏态分布特征的描述

3.3.1　偏态分布：正偏态和负偏态

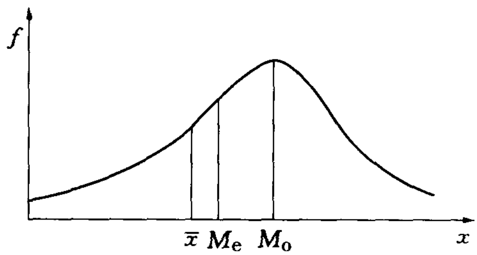
偏态分布分为正偏态和负偏态。当均值大于众数时称为正偏态；当均值小于众数时称为负偏态。

表 3－3 偏态频率分布表

组别	组中值	频数	累计频数	组中值×频数	离差平方×频数
2.5 ～7.5	5	1	1	5	444.7
7.5～12.5	10	6	7	60	1 552.7
12.5～17.5	15	10	17	150	1 229.2
17.5～22.5	20	12	29	240	444.6
22.5～27.5	25	11	40	275	13.0
27.5～32.5	30	10	50	300	153.1
32.5～37.5	35	8	58	280	635.5
37.5～42.5	40	5	63	200	967.9
42.5～47.5	45	3	66	135	1 073.1
47.5～52.5	50	2	68	100	1 143.7
52.5～57.5	55	1	69	55	836.0
合计	—	69	—	1 800	8 493.5



(a)正偏态



(b)负偏态

图 3－3 偏态分布图

3.3.2 分组下的众数和中位数

在组距分组情况下，众数的计算要考虑最大频数所在组相邻组的分布，其计算公式如下：

$$M_o = L + d \times \Delta_1 / (\Delta_1 + \Delta_2)$$

式中，L = 最大频数所在组的下限值 = 17.5，d = 最大频数所在组的组距 = 22.5 − 17.5 = 5，Δ_1 = 最大频数所在组的频数与上组频数之差 = 12 − 10 = 2，Δ_2 = 最大频数所在组的频数与下组频数之差 = 12 − 11 = 1，则有

$$M_o = 17.5 + 5 \times 2/(2+1) = 17.5 + 3.33 = 20.83$$

在组距分组条件下，中位数的计算要考虑频数的全部排序，其计算公式如下：

$$M_e = L + d \times (\sum f/2 - S_m)/f_m$$

式中，L = 频数累积到 50%（$\sum f/2$）所在组的下限值 = 22.5，d = 频数累积到 50% 所在组的组距 = 27.5 − 22.5 = 5，S_m = 频数累积到 50% 所在组上组的累积频数 = 29，f_m = 频数累积到 50% 所在组的频数 = 11，则有

$$M_e = 22.5 + 5 \times (69/2 - 29)/11 = 22.5 + 2.5 = 25$$

3.3.3 分组下的均值及其与众数和中位数的关系

在组距分组条件下计算均值，其公式与单变量分组情况相同，即有

$$\overline{x} = \sum xf / \sum f = 1\,800/69 = 26.087$$

从均值(26.087)大于众数(20.833)可知，数据分布为正偏态。

在适度偏态条件下，均值、众数和中位数之间的关系可以估算为：

$$均值 - 众数 = 3 \times (均值 - 中位数)$$

即

$$\begin{aligned} 均值 &\approx (3 \times 中位数 - 众数)/2 \\ &= (3 \times 25 - 20.83)/2 = 27.09 \\ 中位数 &\approx (众数 + 2 \times 均值)/3 \\ &= (20.83 + 2 \times 26.08)/3 = 24.33 \end{aligned}$$

3.3.4 标准差、标准差系数和偏度系数

数据分布状况对标准差的计算无影响，则有

$$\sigma = \sqrt{\sum (x - \overline{x})^2 f / \sum f} = \sqrt{8\,493.5/59} = 11.095$$

$$V = \sigma = 11.095/26.083 = 0.425\,3$$

可见，偏态分布的离散程度高于正态分布的离散程度。

偏度系数反映数据分布偏移中心位置的程度，记为 SK，则有

$$\begin{aligned} SK &= (均值 - 中位数)/标准差 = \frac{\overline{x} - M_o}{\sigma} = \frac{3(\overline{x} - M_e)}{\sigma} \\ &= (\overline{x} - M_o)/\sigma \\ &= (26.083 - 25)/11.95 = 0.091 \end{aligned}$$

在正态分布条件下，由于均值等于众数所以偏度系数等于 0。当偏度系数大于 0 时，称为正偏态；当偏度系数小于 0 时，称为负偏态。

3.4 双变量交叉分布特征的描述

3.4.1 相关关系与协方差

对大量数据进行观察可以得知，单位产品的成本会随着生产规模的扩大而下降；居民家庭的人均食品支出会随着家庭人均生活费收入水平的提高而增加等。一个变量的变化会依存另一个变量的变化而变化，就称这两种关系为相关关系。

表 3-4 居民家庭的人均食品支出(x)与家庭人均生活费收入(y)相关计算表

序号	y	x	$y-\bar{y}$	$x-\bar{x}$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
1	820	750	-1 145.8	-652.5	1 312 934.0	425 756.3	747 656.2
2	930	850	-1 035.8	-552.5	1 072 950.6	305 256.3	572 297.9
3	1 050	920	-915.8	-482.5	838 750.6	232 806.3	441 889.6
4	1 300	1 050	-665.8	-352.5	443 334.0	124 256.3	234 706.2
5	1 440	1 200	-525.8	-202.5	276 500.7	41 006.3	106 481.2
6	1 500	1 200	-465.8	-202.5	217 000.7	41 006.3	94 331.2
7	1 700	1 400	-265.8	-2.5	70 667.3	6.3	664.6
8	1 900	1 500	-65.8	97.5	4 334.0	9 506.3	-6 418.7
9	2 500	1 760	534.2	357.5	285 334.1	127 806.3	190 964.6
10	2 900	2 000	934.2	597.5	872 667.4	357 006.3	558 164.6
11	3 550	2 000	1 584.2	597.5	2 509 584.1	357 006.3	946 539.6
12	4 000	2 200	2 034.2	797.5	4 137 834.2	636 006.3	1 622 247.9
合计	23 590	16 830	0	0	12 041 891.7	2 657 425.0	5 509 525.0
平均值	1 965.8	1 402.5			1 003 491.0	221 452.1	459 127.1

两种变量之间是否存在相关关系，要通过散点图图 3-4 来观察和计算协方差和相关系数来测量。

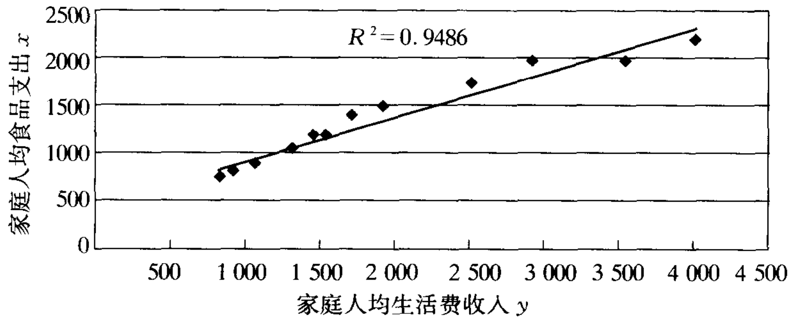


图 3-4 人均收入与人均食品支出的关系

对于变量 x 和 y 来说，协方差是指这两个变量各点的离差之积的平均数，记为 σ_{xy}，则有

$$\sigma_{xy}=\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})/N$$
$$=5\,509\,525/12=459\,127.083\,3$$

如何理解协方差，可以从图 3-5 中来认识。

当 $\sigma_{xy}=\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})/N>0$ 时，为正相关(散点在第一、三象限)；

当 $\sigma_{xy}=\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})/N<0$ 时，为负相关(散点在第二、四象限)；

当 $\sigma_{xy}=\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})/N=$最大值时，为完全相关(散点为一条直线)；

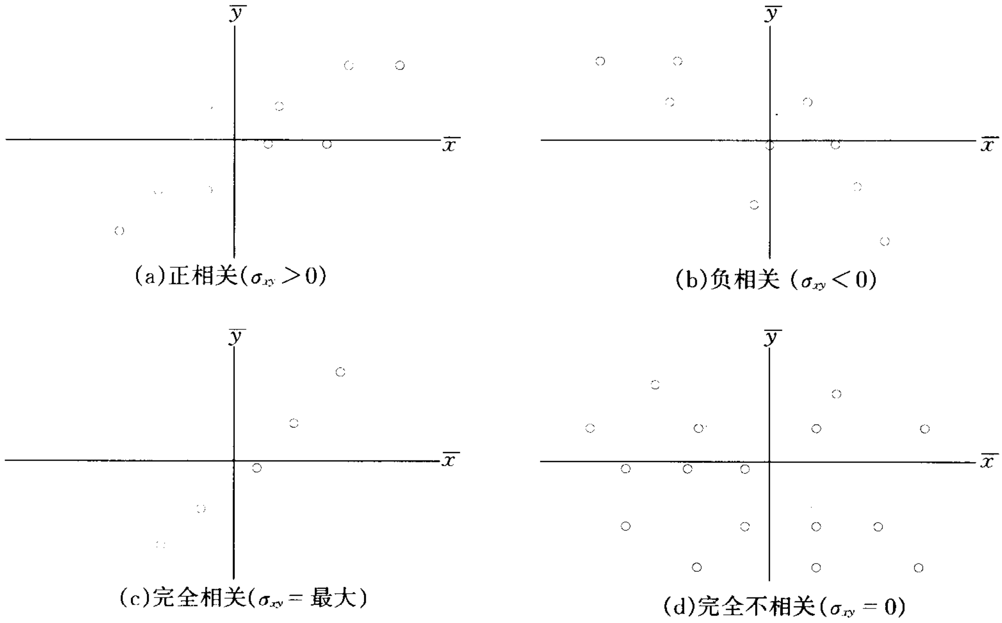


图 3－5　协方差类别示意图

当 $\sigma_{xy}=\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})/N=0$ 时，为完全不相关(散点在各象限)。

3.4.2　相关系数

协方差的大小会受到计量单位和数据均值水平的影响，从而使不同相关总体之间的相关程度缺乏可比性。为了使不同相关总体之间的相关程度具有广泛的可比性，需要计算相关系数。

相关系数是指协方差与两个标准差乘积之比，记为 r，则有

$$\begin{aligned} r &= \sigma_{xy}/(\sigma_x\sigma_y) \\ &= 459\,127.083\,3/\sqrt{1\,003\,491\times221\,452.1} \\ &= 459\,127.083\,3/471\,407.668=0.973\,95 \end{aligned}$$

一般地说，相关系数大于 0.8 就为高度相关；超过 0.5 为显著相关；在 0.3 为低度相关。从本例中可知相关系数为 0.97，表明家庭人均生活费收入水平的提高会引起人均食品支出的增加，两者之间的依存关系非常稳定。

【本章小结】

数据的分布特征分为集中趋势特征和离中趋势特征。通过计算众数、中位数和均值等可以了解集中趋势特征；通过计算标准差和标准差系数可以了解离中趋势特征。另外，通过计算协方差和相关系数可以了解两种现象之间的相关密切程度。

练习 3

1反映频数分布集中趋势特征和离中趋势特征的指标各有哪些？

2在正态分布或偏态分布下，众数、中位数和均值之间是什么关系？

3已知某商品连续 20 个日的销售量如下：

26，34，21，32，42，36，28，38，17，39，
22，12，56，39，25，41，30，23，27，19

试计算销售量的众数、中位数和均值。

4反映离中趋势的指标中，哪个是最重要的？写出其计算公式。

5为什么要计算标准差系数？

6已知收集到某公司 10 名员工的工龄和工资的样本数据如下：

工龄(年)	4	4	5	6	7	8	8	9	9	10
年工资(百元)	120	160	200	300	240	280	340	320	400	440

计算员工的工龄和年工资的均值、标准差和标准差系数。比较并回答工龄和年工资哪个离散程度大。

7协方差和相关系数是什么关系？为什么要计算相关系数？计算练习 6 中员工工龄与年工资的协方差和相关系数。

8数值平均数与位置平均数是依据什么来区分的？这两类平均数之间有何异同？

9与众数、中位数相比较，算术平均数在对数据的计算处理上有何特点？

10试比较极差、平均差和标准差三种变异指标的特点，并说明为什么标准差是最常用、最基本的变异指标。

11变异系数与极差、平均差、标准差和方差等一般变异指标相比，在数值表现形式上有何特点？在分析意义上又有何差别？

12在分析意义上，偏度和峰度指标与平均指标、变异指标有何区别？为什么除了计算一般的平均指标和变异指标之外，还需要考察分布的偏度和峰度？

13在统计分析中，为什么需要运用分数位？它主要有哪些应用？

14某学院二年级两个班的学生英语统考成绩如下表：

英语统考成绩	学生人数	
	A 班	B 班
50 以下	1	2
50～60	3	4
60～70	12	13
70～80	24	28
80～90	6	8
90 以上	4	5
合计	50	60

要求：

(1) 分别计算两个班的平均成绩；

(2) 试比较说明，哪个班的平均成绩更有代表性？哪个班的学生英语水平差距更大？你是用什么指标来说明这些问题的，为什么？

⑮利用上题的资料，试计算 A 班成绩分布的极差和平均差，并与标准差的计算结果进行比较，看看三者之间是何种数量关系。

4 时间序列分析

学习目标 本章学习要掌握同一现象在不同时间的增长速度、平均增长速度、长期趋势和季节变动等统计分析方法。

4.1 发展水平和发展速度分析

4.1.1 时间序列

前面所讲的数列都属于静态数列，即在相同时间条件下现象的分布状况。

时间序列是反映现象随着时间的变化而变化的数据系列，也称为时间数列或动态数列。时间和指标数据是构成时间序列的两个基本因素。表 4－1 反映了某商场饮料销售量与库存量在各年的变化。

表 4－1 饮料销售量与库存量在各年的变化情况

年份	销售量(箱)	年末库存(箱)	平均库存(箱)	周转速度(次)
2001	—	350	—	—
2002	1 710	400	375	4.6
2003	2 110	550	475	4.4
2004	3 310	800	675	4.9
2005	4 020	950	875	4.6

4.1.2 发展水平和增长量

发展水平是指时间数列上指标的具体数值，如 2 110 箱是 2003 年饮料销售量的发展水平，4.9 次分别是 2004 年饮料销售周转速度的发展水平等。可见，发展水平的指标形式可以是绝对数，也可以是相对数或平均数。

根据发展水平在时间序列中所处的位置不同，以 2001 年为起点，把 1 710 箱称为最初水平，记为 X_0；以 2005 年为终点，把 4 020 箱称为最末水平，记为 X_n；居于中间位置的称中间水平，记为 X_1，X_2，X_3，…，X_{n-1}。另外，为了分析上的方便，就把作为研究对象的发展水平称为报告期水平，把要对比的基础水平称为基期水平。例如，我们要研究 2004 年的销售量比上年多了多少，那么，2004 年的 3 310 箱就是报告期水平，而 2003 年的 2 110 箱则是基期水平。

用报告期水平减去基期水平，就等于增长量。其中，当基期水平为上期水平时，就称为逐期增长量；当基期水平为某个时期的固定发展水平(X_0)时，就称为累计增长量。

逐期增长量：X_1-X_0，X_2-X_1，X_3-X_2，…，X_n-X_{n-1}

累计增长量：X_1-X_0，X_2-X_1，X_3-X_1，…，X_n-X_1

二者的关系：$(X_n-X_0)=(X_1-X_0)+(X_2-X_1)+(X_3-X_2)+\cdots+(X_n-X_{n-1})$

4.1.3 发展速度和增长率

报告期水平与基期水平之比，称为发展速度。其中，当基期水平为上期水平时，就称为环比发展速度；当基期水平为某个时期的固定发展水平(X_1)时，就称为定基发展速度。

环比发展速度：X_1/X_0，X_2/X_1，X_3/X_2，…，X_n/X_{n-1}

定基发展速度：X_1/X_0，X_2/X_1，X_3/X_1，…，X_n/X_1

二者的关系：$(X_n/X_0)=(X_1/X_0)\cdot(X_2/X_1)\cdot\cdots\cdot(X_n/X_{n-1})$

发展速度减去 1 就等于增长速度或增长率，分别有环比增长率和定基增长率。

表 4－2 反映了 2002 年至 2005 年各季度饮料销售量变化情况。

表 4－2　2002 年至 2005 年各季度饮料销售量变化情况

年份	季度	时间变量	销售量（箱）	气温（℃）	逐期增长量（箱）	环比增长速度	累积增长量（箱）	定基增长速度	同比增长量（箱）	同比增长速度
2002	1	1	100	8	—	—	—	—	—	—
	2	2	580	28	480	480.0%	480	580.0%	—	—
	3	3	680	30	100	17.2%	580	680.0%	—	—
	4	4	350	18	－330	－48.5%	250	350.0%	—	—
2003	1	5	150	10	－200	－57.1%	50	150.0%	50	50.0%
	2	6	700	27	550	366.7%	600	700.0%	120	20.7%
	3	7	960	32	260	37.1%	860	960.0%	280	41.2%
	4	8	300	17	－660	－68.8%	200	300.0%	－50	－14.3%
2004	1	9	210	9	－90	－30.0%	110	210.0%	60	40.0%
	2	10	1 100	30	890	423.8%	1 000	1 100.0%	400	57.1%
	3	11	1 300	31	200	18.2%	1 200	1 300.0%	340	35.4%
	4	12	700	20	－600	－46.2%	600	700.0%	400	133.3%
2005	1	13	450	8	－250	－35.7%	350	450.0%	240	114.3%
	2	14	1 450	35	1 000	222.2%	1 350	1 450.0%	350	31.8%
	3	15	1 400	31	－50	－3.4%	1 300	1 400.0%	100	7.7%
	4	16	720	22	－680	－48.6%	620	720.0%	20	2.9%

从表 4－2 中可知，饮料销售量在各季环比增长量和增长速度方面有负增长现象，累积增长量和定基增长速度方面均为正增长，但波动很大(见图 4－1)。在统计学上，为了消除季节引起的波动问题，设计了同比增长量和同比增长率指标。同比指标是用报告期水平与上年同期水平的对比结果。例如，2004 年第一季度销售量同比增长量就为 210－150＝60(箱)，同比增长率为 60/150＝40%。只要现象是向上发展的，同比指标一般应为正数。

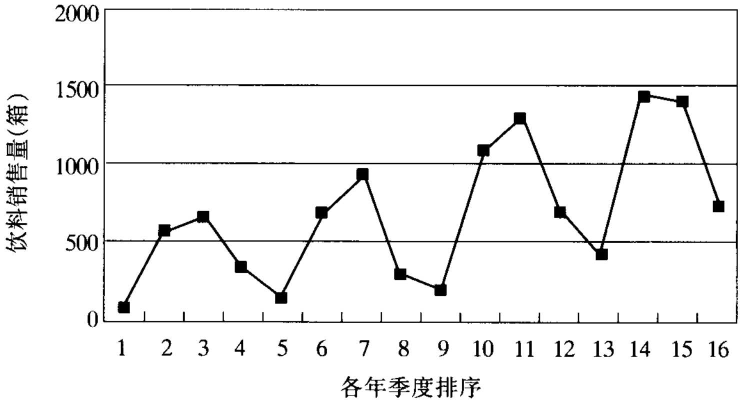


图 4－1 饮料销售量在各年度上的变化情况

4.2 序时平均数和平均发展速度

4.2.1 绝对数数列的序时平均数

序时平均数也称为动态平均数，它反映现象在一定时期内发展水平达到的一般水平。由于指标形式分绝对数、相对数和平均数等，所以对其平均的方法存在差异性。

绝对数有时期数和时点数之分，两者的区别主要在于是否具有可加性。产品产量、销售额、工资总额、利润总额等都是具有可加性的指标，称为时期数；产品库存量、期末现金量、期末人口数等都不具有可加性，或者说，各时期的绝对数相加无意义，则称为时点数。

时期数的序时平均数就等于各时期水平的简单平均。用 a 表示饮料销售量(单位：箱)，其中：$a_1=1\,710$，$a_2=2\,110$，$a_3=3\,310$，$a_4=4\,020$。2002 年至 2005 年饮料销售量年平均为

$$\overline{a}=\sum a_i/n=(1\,710+2\,110+3\,310+4\,020)/4=11\,150/4=2\,787.5(\text{箱})$$

时点数所反映的是现象在某一个瞬时的状态，2002 年年末库存量为 400 箱，只反映 2002 年 12 月 31 日零点上饮料销售量的状况。2002 年年初即 1 月 1 日零点的库存量为 350 箱。年初库存量与年末库存量之间没有直接的联系，它们都是各自前期饮料进货流量和销货流量累计之差导致的结果。这就是两个时点数相加无意义的原因。

但是，库存量水平会随着销售规模的扩大而增长或缩小而减少。在统计上，我们可以假定年初库存量 350 箱以均匀速度增长达到年末水平的 400 箱，所以，2002 年饮料的平均库存量应等于年初水平加上期末水平除以 2，即(350＋400)/2＝375(箱)。2002 年至 2004 年饮料的平均库存量应等于各年平均库存量相加除以 4，即(375＋475＋675＋875)/4＝600(箱)。

为了直接利用现有资料计算时点数序时平均数，用 W 表示库存量(箱)，$W_0=350$、$W_1=400$，$W_2=550$，$W_3=800$，$W_4=950$，则有

$$\overline{W}=\frac{\dfrac{W_0}{2}+W_1+W_2+W_3+\dfrac{W_4}{2}}{4}=\frac{\dfrac{350}{2}+400+550+800+\dfrac{950}{2}}{4}=600(\text{箱})$$

4.2.2 相对数的序时平均数和平均数的序时平均数

饮料的库存周转速度属于相对数，该相对数的分母为时点数。从年度上看，年周转速度应等于年销售量与年平均库存量的比值。因此，先平均后对比是计算相对数序时平均的基本方法。用 K 表示库存周转速度或次数，2002 年至 2005 年饮料的平均周转速度为

$$\overline{K}=\frac{\bar{a}}{\overline{W}}=\frac{\dfrac{\sum a}{4}}{\dfrac{\dfrac{W_0}{2}+W_1+W_2+W_3+\dfrac{W_4}{2}}{4}}=\frac{2\,787.5}{600}=4.646\ (\text{次})$$

平均数序时平均数的计算与相对数的序时平均数的计算方法相同，也是先平均后对比。

4.2.3 几何法平均发展速度

平均发展速度反映的是现象在一定时期内发展速度的一般水平，它也是一种序时平均数。几何平均法是计算平均发展速度的最常用方法。它等于各时期环比发展速度连乘积的 n 次方根，记为 $\bar{x}$。以 2002 年为起点，2003 年至 2005 年 3 年饮料销售量的平均发展速度为

$$\bar{x}=\sqrt[n]{\prod x_i}=\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}=\sqrt[3]{\frac{4\,020}{1\,710}}=\sqrt[3]{2.350\,88}=1.329\,67=132.97\%$$

平均发展速度减去 1 就等于平均增长速度或平均增长率。以上计算表明，3 年销售量平均增长率为 32.97%。

在计算中，由于各环比发展速度等于定基发展速度，所以，平均发展速度最终是由最初水平和最末水平决定的，即

$$\prod x_i=x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n=\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{a_n}{a_0}$$

几何平均法的优点是可以利用相关资料对未来发展水平进行预测，即

$$\text{最末水平}=\text{最初水平}\times(\text{平均发展速度})^n$$

或

$$a_n=a_0(1+\bar{x})^n$$

如果 2005 年饮料销售量为 4 000 箱，若每年平均增长率为 33%，2 年后(2007 年)销售量应达到 7 075.6 箱，即

$$a_n=4\,000\times(1+33\%)^2=7\,075.6(\text{箱})$$

可见，预测 2 年后即 2007 年的销售量可达到 7 075 箱。

4.2.4 累计法平均发展速度

几何平均法的应用条件是要求现象呈现均匀变动。如果现象发生大起大落的变化，用几何平均法所计算的平均发展速度将失去代表性。这是几何平均法的缺点。这时，应该使用累计法或方程法来弥补几何平均法的缺点。

累计法考虑各时期的发展状况，不只是受最初和最末两个极端值的影响，公式如下：

$$\bar{x}+\bar{x}^2+\bar{x}^3+\cdots+\bar{x}^n=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{a_0}=(2\,110+3\,310+4\,020)/1\,710=5.520\,46=552.046\%$$

只要解出高次方程，所得的正根就是要求的平均发展速度。一般是通过查“平均增长速度查对表”得出结果的。累计法适合计算投资额等波动较大的现象的平均发展速度。

4.3 长期趋势分析

4.3.1 移动平均长期趋势

时间序列分析中的长期趋势分析是最重要的内容。

现象在时间上的变动趋势可分为三种情况：上升变动、下降变动和水平变动。长期趋势分析就是要从现象的波动中寻找到发展趋势，以便对未来情况进行预测。

从表 4－2 中可以看出，销售量在季度上的变动有波动性，而从长期来看则呈现向上发展的趋势。如何把现象的短期波动消除掉，使其呈现趋势性状态是我们要研究的内容。

测定长期趋势的方法主要有三种：随手画法、移动平均法和最小平方法。

随手画法需要一定的经验和技巧，具有实用价值。这里只介绍移动平均法和最小平方法。

移动平均法是指将时间序列各发展水平按照固定的周期长度计算所有的序时平均数所得到的新的时间序列。周期长度可以选 2，3，4，…，从方便角度可选 3，5，7，…。表 4－3 给出了周期长度为 3 季、4 季、5 季的移动平均数时间序列。

表 4－3 周期长度为 3 季、4 季、5 季的移动平均数表 单位：箱

年份季度	时间变量	销售量	3 季移动	4 季移动 1	4 季移动 2	5 季移动
2002.1	1	100	—	—	—	—
2	2	580	453.3	427.5	—	—
3	3	680	536.7	440.0	433.8	372
4	4	350	393.3	470.0	455.0	492
2003.1	5	150	400.0	540.0	505.0	568
2	6	700	603.3	527.5	533.8	492
3	7	960	653.3	542.5	535.0	464
4	8	300	490.0	642.5	592.5	654
2004.1	9	210	536.7	727.5	685.0	774
2	10	1 100	870.0	827.5	777.5	722
3	11	1 300	1 033.3	887.5	857.5	752
4	12	700	816.7	975.0	931.3	1 000
2005.1	13	450	866.7	1 000.0	987.5	1 060
2	14	1 450	1 100.0	1 005.0	1 002.5	944
3	15	1 400	1 190.0	—	—	—
4	16	720	—	—	—	—

3 季移动平均就是每 3 个季度的数据放在一起计算序时平均数所得到的新时间序列。例如，将 2002 年的 1 季度、2 季度和 3 季度的销售量进行简单平均得到 453.3(箱)；将 1998 年 2 季度、3 季度和 4 季度的销售量进行简单平均得到 536.7(箱)等等，以此类推。图4－2 显示了移动平均法描述的饮料销售量的长期变动趋势。

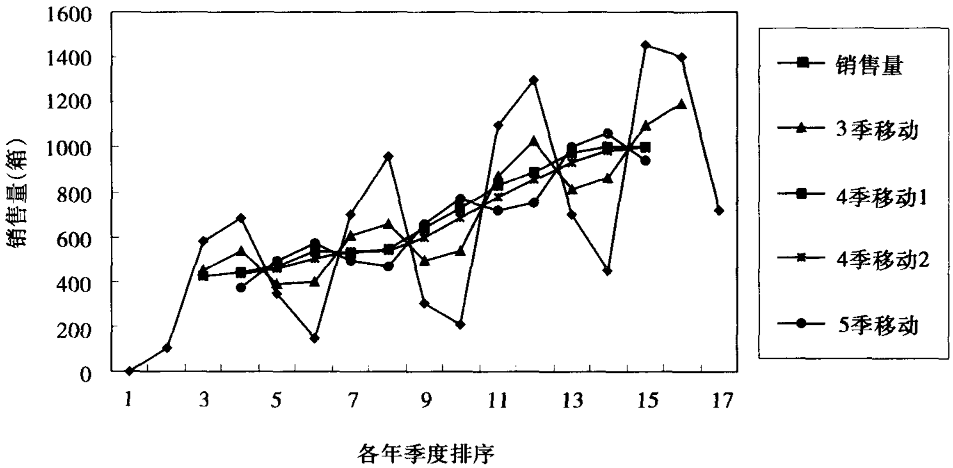


图 4－2　饮料销售量的长期发展趋势

4 季移动平均可以得到比 3 季移动平均更加有趋势性的数据，或者说趋势值的波动性小。由于取周期为 4 的移动平均数不能落在年份中央位置，所以要进行二次平均。4 季移动平均 2 则是我们要得到的结果。例如，4 季移动平均 1 中的第一个数据为(100＋580＋680＋350)/4＝453.3(箱)，应该放在 2002 年第 2 季度末和第 3 季度初的位置，可能暂时放在 2002 年第 2 季度中间。4 季移动平均 2 中的第一个数据则等于 4 季移动平均 1 中的前两位数据的简单平均，即(427.5＋440)/2＝433.8(箱)，以此类推。

5 季移动平均应该是比 4 季移动平均更加具有趋势性的时间序列，但却没有四季移动平均得到的趋势性稳定。为什么？一般情况下，移动的时间长度越长所得的趋势性就越明显，但是，当现象发展呈现周期性规律时，移动平均的时间长度应与现象的周期长度相同，否则，趋势性就会受到破坏。饮料销售量在一年中受季节气温不同的影响而呈现周期性变化，天热销量大、天冷销量少是其规律。4 季移动平均符合规律，5 季移动平均就违背了规律。因此，5 季移动平均的趋势性低于 4 季移动平均的趋势性。

需要强调的是，当现象存在明显的周期性时，必须按照周期性长度来确定移动时间长度，在此基础上，移动平均的时间长度越长，其趋势性就越明显。如 8 季平均是比 4 季平均更加具有趋势性的移动平均。这就是移动平均法中要遵守的周期性原则。

在股票市场上，移动平均法被放在最为重要的地位。对股票价格计算 5 日移动、10 日移动、20 日和 30 日移动以及 120 日移动等多种平均价格都是不可缺少的股价信息，分别反映股价发展中呈现的小趋势、中趋势和大趋势，成为投资技术分析的基本依据。

移动平均法的优点在于计算简便，运用灵活，不受现象复杂性影响。其缺点主要有三个：一是失去首尾两头的若干数据，平均的时间长度越长，失去的信息就越多；二是不能较好地进行长期趋势的预测；三是对周期性处理不好就会影响数列的趋势性。

4.3.2 最小平方直线趋势

利用最小平方法可以得到一条直线趋势方程。直线趋势方程的一般形式为：

$$\hat{Y}_t = a + bt$$

式中，$\hat{Y}_t$ 为时间数列 Y_t 趋势值；t 为时间变量；a 为截距项，是 $t=0$ 时 $\hat{Y}_t$ 的初始值；b 为趋势线斜率，表示时间 t 变动一个单位时趋势值 $\hat{Y}_t$ 的平均变动数量。

按照最小平方法的要求，要使 $Q=\sum(Y_t-\hat{Y}_t)^2=\sum(Y_t-a-bt)^2$ 达到最小，Q 对 a 和 b 的偏导数必须等于零。进一步可以得到估计参数 a 和 b 的标准方程组，即

$$\sum Y = an + b\sum t$$

$$\sum tY = a\sum t + b\sum t^2$$

或

$$b=\frac{n\sum tY-\sum t\sum Y}{n\sum t^2-(\sum t)^2}$$

$$a=\overline{Y}-b\bar{t}=\frac{\sum Y}{n}-b\frac{\sum t}{n}$$

例4－1 对表4－3某商场饮料销售量各年季度的变化趋势，用最小平方法拟合一条最优趋势方程。

解：设所求直线方程为

$$\hat{Y}_t = a + bt$$

估计参数 a 和 b 的标准方程组为：

$$\sum Y = an + b\sum t$$

$$\sum tY = a\sum t + b\sum t^2$$

对照公式要求计算有关数据并列表如下：

表 4－4 直线方程拟合计算表

年份季度	时间变量 t	销售量 Y（箱）	tY	t^2	年份季度	时间变量 t	销售量 Y（箱）	tY	t^2
2002.1	1	100	100	1	2004.1	9	210	1 890	81
2	2	580	1 160	4	2	10	1 100	11 000	100
3	3	680	2 040	9	3	11	1 300	14 300	121
4	4	350	1 400	16	4	12	700	8 400	144
2003.1	5	150	750	25	2005.1	13	450	5 850	169
2	6	700	4 200	36	2	14	1 450	20 300	196
3	7	960	6 720	49	3	15	1 400	21 000	225
4	8	300	2 400	64	4	16	720	11 520	256
					合计	136	11 150	113 030	1 496

将表中数据代入以下公式：

$$b=\frac{n\sum tY-\sum t\sum Y}{n\sum t^2-(\sum t)^2}=\frac{16\times 113\,030-136\times 11\,150}{16\times 1\,496-(136)^2}=\frac{292\,080}{5\,440}=53.691\,1$$

$$a=\bar{y}-b\bar{t}=\frac{\sum Y}{n}-b\frac{\sum t}{n}=\frac{111\,150}{16}-53.691\,1\times\frac{136}{16}=240.5$$

得到直线方程为

$$\hat{Y}_t = 240.5 + 53.691t$$

斜率 $b = 53.69$ 表示在 2002 年至 2005 年期间饮料销售量每季度平均增长 53.69 箱。

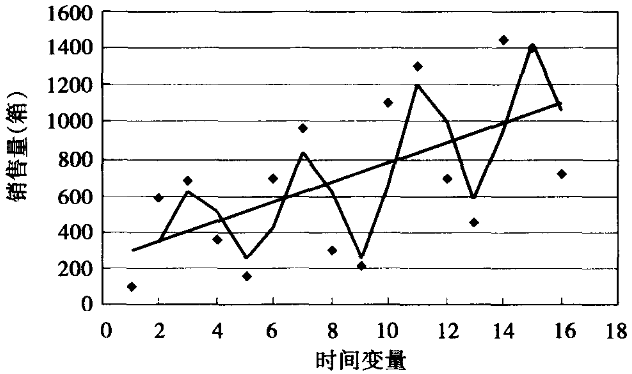


图 4－3 饮料销售量直线型长期变动趋势

4.3.3 非线性趋势

非线性趋势也称为曲线趋势。现象为非线性趋势变动的形式多种多样，例如，可能为抛物线型、指数曲线型、修正指数曲线型、Gomperte 曲线型等等，各种曲线的拟合方法各不相同。这里只介绍较常用的抛物线型和指数曲线型。

(1) 抛物线型

当现象的长期趋势近似于抛物线形态时，可拟合为如下二次曲线方程：

$$\hat{Y}_t = a + bt + ct^2$$

按多元回归的方式用最小二乘法导出下列三个标准方程式：

$$\sum Y = an + b\sum t + c\sum t^2$$

$$\sum tY = a\sum t + b\sum t^2 + c\sum t^3$$

$$\sum t^2 Y = a\sum t^2 + b\sum t^3 + c\sum t^4$$

已知 1999 年至 2005 年饮料销售量情况，见表 4－5。

表 4－5 1999－2005 年饮料销售量情况

年份	时间变量	销售量(箱)	年份	时间变量	销售量(箱)
1999	1	1 000	2003	5	2 110
2000	2	1 200	2004	6	3 310
2001	3	1 440	2005	7	4 020
2002	4	1 710			

根据以上有关资料可求出抛物线型趋势方程为

$$\hat{Y}_t = 1\,207.1 - 226.55t + 90.60t^2$$

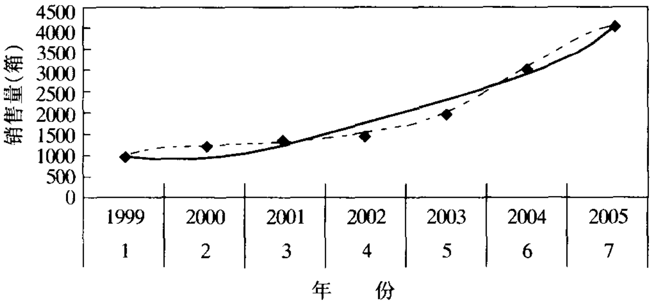


图 4－4 1999－2005 年饮料销售情况曲线趋势

当需要预测 2006 年销售量时，设定时间 $t=8$，代入曲线方程，可计算出 2006 年估计销售量为 5 193.1 箱。

(2) 指数曲线型

当现象的长期趋势每期大体上按相同的增长速度递增或递减变化时，可拟合为如下指数曲线方程：

$$\hat{Y}_t = ab^t$$

指数曲线的特点是各期环比增长速度大体相同，或者说时间序列的逐期趋势值按一定的百分比递增或衰减。式中，若 $b>1$，逐期增长率随 t 的增加而增加；若 $b<1$，逐期增长率随 t 的增加而降低。为估计参数 a 和 b，可将公式两端取对数：

$$\lg\hat{Y}_t = \lg a + t\lg b$$

设定 $Y=\lg\hat{Y}_t$，$A=\lg a$，$B=\lg b$，则有 $Y=A+tb$，运用最小平方法可估计出 A 和 B，再取反对数即可得参数 a 和 b 的估计值。

4.4 季节变动分析

我们使用的数据为月数据和季数据时，就可以研究数据中包含的季节变动规律。季节分析的方法主要有月平均法和趋势剔除法两种。

4.4.1 月平均法

月平均法是把各年同月的数据排列在一起，计算出各年同月平均值和各年的月平均数，再计算二者的比值，即是所求的季节比率或季节指数。

这里根据季度变化数据(见表 4－6)，先计算得各季平均值(单位：箱)227.5、957.5、1 085、517.5，再计算出季的总平均值(227.5＋957.5＋1 085＋517.5)/4＝696.875 箱，分别将各季平均值与季总平均值对比，得 1 季比率＝227.5/696.875＝0.326 46，2 季比率＝957.5/696.875＝1.374 0 等等。

各季比率之和应该等于 4。若有出入要调整到 4。

表 4-6 月平均法季节指数计算表 单位：箱

	2002 年	2003 年	2004 年	2005 年	合计	季平均值	季节比率
1 季	100	150	210	450	910	227.5	0.326 457
2 季	580	700	1 100	1 450	3 830	957.5	1.373 991
3 季	680	960	1 300	1 400	4 340	1 085	1.556 951
4 季	350	300	700	720	2 070	517.5	0.742 601
合计	1 710	2 110	3 310	4 020	11 150	2 787.5	4
平均值	—	—	—	—	—	696.875	—

4.4.2 趋势剔除法

月平均法计算季节指数比较简便，易于理解，但却包含了现象向上发展的趋势，导致季节指数受到不同的加权作用，近期的季节指数在整个指数中的影响大，远期的季节指数影响小。因此，我们应该先剔除趋势值的影响，再计算季节指数。

第一步，对原数据(Y)计算移动平均数(T)。$T=\sum Y/n$。

第二步，计算具体的季节比率(SI)。SI $=Y/T$。

表 4-7 趋势剔除法季节指数计算表(一)

年份季度	时间变量 t	销售量 Y(箱)	4 季移动 T(箱)	季节比率 $Y/T=$SI
2002.1	1	100	—	—
2	2	580	—	—
3	3	680	433.75	1.567 723
4	4	350	455	0.769 231
2003.1	5	150	505	0.297 03
2	6	700	533.75	1.311 475
3	7	960	535	1.794 393
4	8	300	592.5	0.506 329
2004.1	9	210	685	0.306 569
2	10	1 100	777.5	1.414 791
3	11	1 300	857.5	1.516 035
4	12	700	931.25	0.751 678
2005.1	13	450	987.5	0.455 696
2	14	1 450	1 002.5	1.446 384
3	15	1 400	—	—
4	16	720	—	—

第三步，计算月(季)平均值($\overline{\mathrm{SI}}$)，消除不规则波动。如第一季度的季平均值为

$$\overline{\text{SI}}=(\sum\overline{\text{SI}})/n=(0.297\,0+0.306\,6+0.455\,7)/3=1.059\,3/3=0.353\,1$$

第四步，计算季节比率(S)。如第一季度的季节比率为

$$S=\overline{\text{SI}}\times\text{修正系数}=\overline{\text{SI}}\times\frac{4}{4.045\,8}=0.353\,1\times0.988\,7=0.349\,1$$

表 4－8 趋势剔除法季节比率计算表(二)

	2002 年	2003 年	2004 年	2005 年	合计	季平均值	季节比率
1 季	—	0.297 03	0.306 569	0.455 696	1.059 3	0.353 1	0.349 103
2 季	—	1.311 475	1.414 791	1.446 384	4.172 7	1.390 9	1.375 154
3 季	1.567 723	1.794 393	1.516 035	—	4.878 2	1.626 067	1.607 659
4 季	0.769 231	0.506 329	0.751 678	—	2.027 2	0.675 733	0.668 084
合计	2.337	3.909 2	3.989 1	1.902 1	12.137 4	4.045 8	4
修正系数	—	—	—	—	—	0.988 67	—

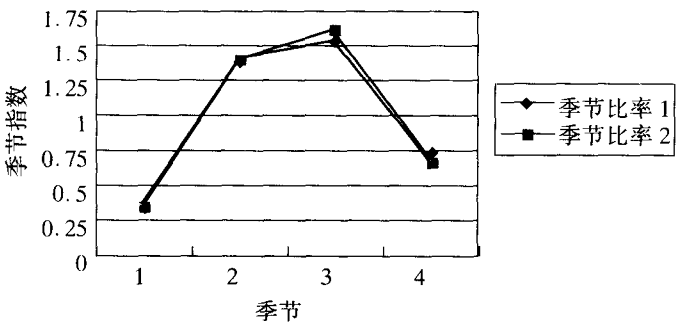


图 4－5 季节指数对照(其中季节指数 2 为趋势剔除法)

第五步，使用季节比率进行预测。已知 2006 年饮料的销售量预测值为 5 193 箱，第 1～4 季度的预测值分别为：(5 193/4)×(0.439 1，1.375 2，1.607 7，0.668 1)＝(570，1 785，2 087，867)(箱)。

【本章小结】

时间数列不同于横截面的静态数列，要求数据在时间上具有可比性。对时点数和时期数的计算方法有差别。计算和分析现象的增长速度和移动趋势时，要注意现象的季节性和周期性问题。在对现象进行预测时，可以将长期趋势分析方法和季节变动分析方法结合起来使用。

练习 4

1 什么是时间序列？时期数列与时点数列有什么区别？

2 计算平均发展速度有哪两种方法？它们各具有哪些特点？

3甲企业近4年的产品销售量分别增长6%、5%、7%、8%；乙企业这4年产品的返修率也正好是6%、5%、7%、8%。这两个企业这4年的平均增长率和平均返修率是否也一样？为什么？

4某地区社会总产值1995～1998年4年间平均每年递增15%，1999～2001年3年间平均每年递增12%，2002～2005年4年间平均每年递增9%，计算：(1) 该地区11年来社会总产值共增长了多少？(2) 年平均增长速度是多少？

5某地区2005年上半年各月的社会劳动者人数和国内生产总值资料如下表所示。

月份	1	2	3	4	5	6
国内生产总值(亿元)	300	310	315	325	340	360
月初社会劳动者人数(万人)	1 680	1 800	1 760	1 860	1 920	2 060

又知2005年6月末社会劳动者人数为2 100万人，计算该地区2005年上半年以国内生产总值计算的月平均劳动生产率。

6某企业1997～2005年的产品销售额资料如下表所示。

年份	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
销售额(万元)	80	83	87	89	95	101	107	115	125

(1) 用3年移动平均法计算趋势值；

(2) 用最小平方法配合线性趋势方程，计算2006年的趋势值。

7已知某企业某商品最近几年各季度的销售量如下表所示(单位：万件)。

	第一季度	第二季度	第三季度	第四季度
2002年	13	18	5	8
2003年	14	18	6	10
2004年	16	22	8	12
2005年	19	25	15	17

试分别用同期平均法和移动平均趋势剔除法计算季节比率。

8一般平均数和序时平均数有什么不同？

9什么是发展水平、增长量、平均增长量、发展速度、增长速度和增长百分之一绝对值？定基发展速度和环比发展速度，发展速度和增长速度的关系如何？

10什么是长期趋势剔除法？这种方法如何计算季节指数和季节差分析季节变动？分析趋势季节变动的类型有几种？

11什么是季节变动分析？其目的是什么？常用的有哪几种分析方法？

12某企业2000年的增加值为4 000万元，计划到2005年增加值要达到10 000万元。

试计算：

(1) 每年应以怎样的增长速度进行生产，才能达到预定的计划目标?

(2) 如果希望提前两年完成计划，则每年的增长速度应比原来提高多少?

(3) 如果按新的增长速度继续生产，到 2005 年该企业的增加值应为多少?

⑬已知某地区国内生产总值最近 5 年的环比增长速度依次为：8.20%、8.80%、8.98%、10.50%、10.83%，试计算该地区 5 年的平均增长速度，若该地国民生产总值翻两番需要多少时间?

⑭某市水产公司 2003 至 2005 年各季销售水产品资料如下：(单位：万担)

年份	2003				2004				2005			
季度	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
销量	1.05	0.85	2.04	1.48	1.83	1.7	4.46	3.17	3.21	3.85	6.33	4.8

试用最小平方法配合直线模型，剔除长期趋势，计算季节指数，分析趋势季节变动。

⑮某地年税收总额如下：

年份	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
税收收入(亿元)	2 821.86	2 990.17	3 296.91	4 255.3	5 126.88	5 126.88	6 038.04

试计算：

(1) 环比发展速度和定基发展速度；

(2) 环比增长速度和定基增长速度；

(3) 增长 1% 的绝对值；

(4) 用几何平均法和高次方程法计算平均增长速度；

(5) 用普通最小二乘法对税收收入建立指数曲线模型，测定其长期趋势。

5 统计指数

学习目标 本章学习和掌握复杂现象在时间上变化的统计方法，重点掌握总指数中的拉氏指数和派氏指数的编制方法。

5.1 统计指数及其编制方法

5.1.1 个体指数和总体指数

统计学上的“指数”与数学上的“指数函数”的“指数”不同，统计指数常常也被称为“经济指数”。因为运用统计指数可以考察很多社会经济问题，例如，通过生产指数可以反映经济增长的实际水平，通过股价指数可以显示股市行情，通过物价指数可以说明市场价格的动态及其对居民生活的影响，通过购买力评价指数又可以进行经济水平的国际对比，等等。

指数作为一种对比性的统计指标具有相对数的形式，通常表现为百分数。譬如，已知某年全国的零售物价指数为105%，这就表示：当年全国的价格水平就相当于基年的105%，或者说，当年的价格上涨了5%。指数在经济分析上具有十分广阔的应用领域，它可以是不同时间的现象水平的对比，也可以是不同空间(如不同国家、地区、部门、企业等)的现象水平的对比，或者，是现象的实际水平与计划(规划或目标)水平的对比等。

从考察的范围看，统计指数可以分为“个体指数”和“总指数”。个体指数是考察总体中个别现象或个别项目的数量对比关系的指数，如市场上某种商品的价格指数或销售量指数。市场上全部商品销售额指数也属于个体指数。

假定有某市场上五种商品的销售价格和销售量资料如表5-1所示。表中记商品价格为p，销售量为q；下标“0”表示基期，下标“1”表示计算期。

表5-1 商品价格和销售量资料

商品类别	计量单位	商品价格(元)		销售量		指数(%)		销售额(百元)		指数(%)
		基期 p_0	计算期 p_1	基期 q_0	计算期 q_1	p_1/p_0	q_1/q_0	p_0q_0	p_1q_1	$(p_1q_1)/(p_0q_0)$
面粉	百公斤	300.0	360.0	2 400	2 600	120.00	108.33	7 270	9 360	130.54
猪肉	公斤	18.0	20.0	84 000	9 500	111.11	113.10	15 120	19 000	125.66
食盐	500克	1.0	0.8	10 000	15 000	80.00	150.00	100	120	120.00
服装	件	100.0	130.0	24 000	23 000	130.00	95.83	24 000	29 900	124.58
洗衣机	台	1 500.0	1 400.0	510.0	612	93.33	120.00	7 650	8 568	112.00
合计	—	—	—	—	—	—	—	54 070	66 948	123.82

表5－1中的指数均为个体指数。由表中可知，在五种商品中，服装的个体价格指数(130％)最大，表示其价格上涨了30％；食盐的个体价格指数(80％)最小，表示其价格下跌了20％。另一方面，食盐的个体销售量指数(150％)最大，表示其销售量增长了50％，而服装的个体销售量指数(95.83％)最小，表示其销售量减少了4.17％。另外，五种商品销售额指数(123.82％)，表示五种商品的销售金额增长了23.82％。上述这些个体指数就是一般的相对数(在这里是动态相对数)，其计算和分析方法都很简单，可以用公式记为：

个体价格指数 $K_p = p_1/p_0$

个体销售量指数 $K_q = q_1/q_0$

五种商品销售额指数 $K_{pq} = \sum p_1q_1/\sum p_0q_0$

个体指数实质上就是一般的相对数，包括动态相对数、比较相对数和计划完成相对数等，属于广义的指数概念，而统计指数则是指狭义的指数，不包括个体指数，专指总指数。

总指数是考察整个总体现象的数量对比关系的指数，如市场上全部商品物价总指数、市场上商品销售量总指数等。然而，要考察总体现象的数量对比关系，常常就面临着总体中个别现象的数量，如服装销售件数与猪肉销售公斤数，不能直接加总或不能简单综合对比的问题。这样的总体一般称作“复杂现象总体”。因此，总指数与个体指数的区别不仅在于考察范围不同，还在于考察方法的不同。总指数不能简单地沿用一般相对数的计算分析方法，需要制定和运用专门的指数方法。

5.1.2 物价指数和物量指数

物价指数是综合反映各种商品价格变动程度的经济指数，如消费者价格指数和零售物价指数。用 $K_p = p_1/p_0$ 表示各种个体价格指数，用 $\overline{K}_p$ 表示物价总指数，W 表示对个体物价指数采用的权数，则有

$$\text{加权平均物价指数}\quad \overline{K}_p = \frac{\sum \dfrac{p_1}{p_0}W}{\sum W} = \frac{\sum K_pW}{\sum W}$$

物量指数是综合反映各种商品产量或销售量变动程度的经济指数，如工业生产指数和商品销售量指数。用 $K_q = q_1/q_0$ 表示个体销售量指数，用 $\overline{K}_q$ 表示物量总指数，W 表示对个体物量指数采用的权数，则有

$$\text{加权平均物量指数}\quad \overline{K}_q = \frac{\sum \dfrac{q_1}{q_0}W}{\sum W} = \frac{\sum K_qW}{\sum W}$$

按照指数化指标的性质可以把物价指数和物量指数分别归入“质量指标指数”和“数量指标指数”的分类中。所谓“指数化指标”就是在指数中反映其数量变化或对比关系的那种变量。例如，物价指数的指数化指标就是商品或产品的“价格”，销售量指数的指数化指标就是商品的“销售量”，工业生产指数的指数化指标就是工业品的“产量”，而股价指数的指数化指标就是上市交易的“股票价格”，等等。如果一个指数的指数化指标具有质量指标的特征，也即表现为平均数或相对数的形式，它就属于“质量指标指数”。物价指数、股价指数和成本指数等都是质量指标指数；如果一个指数的指数化指标具有数量指标的特征，也即具有总量或绝对

数的形式，它一般就属于“数量指标指数”。销售量指数和生产指数等则是数量指标指数。

但是，诸如商品的销售额指数、产品的成本总额指数或总产值指数等，它们所对比的现象虽然都属于数量指标，却具有“价值总额”的特殊形式，这些价值总额通常可以分解为一个数量因子与一个质量因子的乘积，而相应的指数则反映了两个因子共同变化的影响。如

五种商品销售额指数为

$$K_{pq}=\sum p_1q_1/\sum p_0q_0$$

全部商品销售额指数既不属于“数量指标指数”，也不属于“质量指标指数”，可以单独列为一类，通常称之为“总值指数”。

5.1.3 综合物价指数和加权平均物价指数

综合物价指数和加权平均物价指数都属于总指数。总指数作为考察整个总体现象数量对比关系的指数，其编制方法与个体指数有很大不同。编制总指数通常可以考虑以下两种方式。

（1）先对比、后平均的方式。该方式首先就需要将各种商品的价格或销售量资料进行对比(计算个体指数)，然后通过个体指数的平均得到相应的总指数。这种方法通常称为“平均指数法”。平均指数则是对个体指数进行平均的结果。加权平均物价指数是一种平均指数，其计算公式有两种：

$$\text{加权算术平均物价指数}\quad \overline{K}_p=\frac{\sum\frac{p_1}{p_0}pq}{\sum pq}=\frac{\sum K_p pq}{\sum pq}$$

$$\text{加权调和平均物价指数}\quad \overline{K}_p=\frac{\sum pq}{\sum\frac{p_0}{p_1}pq}=\frac{\sum pq}{\sum\frac{pq}{K_p}}$$

（2）先综合、后对比的方式。该方式首先需要将各种商品的价格或销售量资料加总起来，然后通过对比得到相应的总指数。这种方法通常称为“综合(总和)指数法”。综合指数就是将指数化指标加总之后进行对比的结果。综合物价指数是一种综合指数，其计算公式为：

$$\text{综合物价指数}\quad \overline{K}_p=\frac{\sum p_1q}{\sum p_0q}$$

5.1.4 拉氏指数和派氏指数

在前面给出的计算物价指数的公式中，指数化指标是物价，有关价格的资料是确定的，它们分别是基期价格(p_0)和计算期价格(p_1)。但是，非指数化因素部分，如物量(q)和销售额(pq)等还未确定下来，它们所起的作用主要是实现了使各种物价水平(p)或个体物价指数(K_p)可以加总，其中销售额(pq)在加权总指数中起到了权数的作用。在确定非指数化因素中，主要有两种做法：一是采用基期的资料，二是采用报告期的资料。用前者编制的指数称为拉氏指数，用后者编制的指数称派氏指数。

拉氏物价指数的计算公式是以基期资料为权数的，形式如下：

加权算术平均物价指数(拉氏公式) $\overline{K}_p=\dfrac{\sum\dfrac{p_1}{p_0}p_0q_0}{\sum p_0q_0}=\dfrac{\sum K_pp_0q_0}{\sum p_0q_0}$

综合物价指数(拉氏公式) $\overline{K}_p=\dfrac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}$

派氏物价指数的计算公式是以报告期资料为权数的，形式如下：

加权调和平均物价指数(派氏公式) $\overline{K}_p=\dfrac{\sum p_1q_1}{\sum\dfrac{p_0}{p_1}p_1q_1}=\dfrac{\sum p_1q_1}{\sum\dfrac{p_1q_1}{K_p}}$

综合物价指数(派氏公式) $\overline{K}_p=\dfrac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}$

利用拉氏公式和派氏公式计算物价指数见表 5－2。

表 5－2 拉氏指数和派氏指数计算表

商品名称	计量单位	基期销售额 p_0q_0	报告期销售额 p_1q_1	销售额指数 K_{pq}	拉氏条件 $K_p(p_0q_0)=p_1q_0$	拉氏指数 K_p	派氏条件 $(p_1q_1)/K_p=p_0q_1$	派氏指数 K_p
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)＝(4)/(3)	(6)	(7)＝(6)/(3)	(8)	(9)＝(4)/(8)
面粉	百公斤	720 00	936 000	130.00%	864 000	120.00%	780 000	120.00%
猪肉	公斤	1 512 00	1 900 00	125.66%	1 680 000	111.11%	1 710 000	111.11%
食盐	500 克	10 00	12 000	120.00%	8 000	80.00%	15 000	80.00%
服装	件	2 400 00	2 990 00	124.58%	3 120 000	130.00%	2 300 000	130.00%
洗衣机	台	765 00	856 800	112.00%	714 000	93.33%	918 000	93.33%
合计	—	5 407 00	6 694 80	123.82%	6 386 000	118.11%	5 723 000	116.98%

拉氏公式 $\overline{K}_p=\dfrac{\sum\dfrac{p_1}{p_0}p_0q_0}{\sum p_0q_0}=\dfrac{K_pp_0q_0}{\sum p_0q_0}=\dfrac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}=\dfrac{6\ 386\ 000}{5\ 407\ 000}=1.181\ 1=181.11\%$

派氏公式 $\overline{K}_p=\dfrac{\sum p_1q_1}{\sum\dfrac{p_0}{p_1}p_1q_1}=\dfrac{\sum p_1q_1}{\sum\dfrac{p_1q_1}{K_p}}=\dfrac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}=\dfrac{6\ 694\ 800}{5\ 723\ 000}=1.169\ 8=116.98\%$

拉氏公式和派氏公式所平均的对象都是相同的个体物价，只是由于权数不同，二者所得结果不同。

尽管两者的基本作用都是反映价格水平的综合变动，但两者存在的差别如何处理？通常

人们认为，派氏物价指数的分子与分母之差，即：

$$\sum p_1q_1-\sum p_0q_1$$

能够表明计算期实际销售的商品由于价格变化而增减了多少销售额，因而较之拉氏价格指数具有更强的现实经济意义。不过，从另一角度看，拉氏价格指数的分子与分母之差，即：

$$\sum p_1q_0-\sum p_0q_0$$

仍然是有意义的，它至少能够说明，消费者为了维持基期的消费水平或购买同基期一样多的商品，由于价格的变化将会增减多少实际开支。这种分析意义显然也是很现实的，甚至通常就是人们编制消费者价格指数的主要目的。可见，从经济分析意义的角度看，拉氏指数与派氏指数孰优孰劣，其实并无绝对的判别标准，关键在于能够辨别两者的细微差异，并明确我们利用有关指数具体是要说明什么样的问题。

5.2　一些很重要的价格指数

5.2.1　消费价格指数

消费者价格指数(又称生活费用指数)是综合反映各种消费品和生活服务价格的变动程度的重要经济指数，通常简记为 CPI。该指数可以用于分析市场物价的基本动态，调整货币工资以得到实际工资水平，等等。它是政府制定物价政策和工资政策的重要依据，世界各国都在编制这种指数。

我国的消费者价格指数(居民消费价格指数)是采用固定加权算术平均指数方法来编制的。其主要编制过程和特点是：首先，将各种居民消费划分为八大类，包括食品、衣着、家庭设备及用品、医疗保健、交通和通讯工具、文教娱乐用品、居住项目以及服务项目等，下面再划分为若干个中类和小类；其次，从以上各类中选定 325 种有代表性的商品项目(含服务项目)入编指数，利用有关对比时期的价格资料分别计算个体价格指数；再次，依据有关时期内各种商品的销售额构成确定代表品的比重权数，它不仅包括代表品本身的权数(直接权数)，而且还要包括该代表品所属的那一类商品中其他项目所具有的权数(附加权数)，以此提高入编项目对于所有消费品的一般代表性程度；最后，按从低到高的顺序，采用固定加权算术平均公式，依次编制各小类、中类的消费价格指数和消费价格总指数：

$$\overline{K}_p=\frac{\sum K_pW}{\sum W}=\frac{\sum K_pW}{100}$$

例 5－1　给出居民消费价格指数计算表(见表 5－3)。已知各大类、交通工具和通讯工具中类及其代表商品(代表规格品)的有关资料(有关数据均为假设)。要求据以编制有关的价格指数，并填充表中空缺的数据。

解：利用表中资料和公式，依次计算各类别的消费价格指数和消费价格总指数如下：

(1) 个体(代表规格品)指数：摩托车价格指数 $K_p=p_1/p_0=8\,580/8\,450=101.54\%$

(2) 中类指数：交通工具类价格指数

$$\overline{K}_p=\frac{\sum K_pW}{100}=\frac{45.693+53.570+5.111}{100}=104.37\%$$

表 5-3 某市居民消费价格指数计算表

类别及品名	规格等级	计量单位	基期价格(元)	报告期价格(元)	指数(%)	权数	指数×权数
总指数	—	—	—	—	$\boxed{102.69}$	100	—
一、食品类	—	—	—	—	104.15	42	43.743
二、衣着类	—	—	—	—	95.46	15	14.319
三、家庭设备	—	—	—	—	102.70	11	11.297
四、医疗保健	—	—	—	—	110.43	3	3.313
五、交通和通讯	—	—	—	—	$\boxed{98.53}$	4	3.941
1.交通工具	—	—	—	—	$\boxed{104.37}$	(60)	62.622
(1) 摩托车	100 型	辆	8 450	8 580	$\boxed{101.54}$	(45)	45.693
(2) 自行车	660cm	辆	336	360	$\boxed{107.14}$	(50)	53.570
(3) 三轮车	普通	辆	540	552	$\boxed{102.22}$	(5)	5.111
2.通讯工具	—	—	—	—	89.77	(40)	35.908
六、文教娱乐	—	—	—	—	101.26	5	5.063
七、居住项目	—	—	—	—	103.50	14	14.490
八、服务项目	—	—	—	—	108.74	6	6.524

(3) 大类指数：交通和通讯工具大类的价格指数

$$\overline{K}_p=\frac{\sum K_pW}{100}=\frac{104.37\%\times 60+89.77\%\times 40}{100}=\frac{62.622+35.908}{100}=98.53\%$$

(4) 居民消费价格总指数

$$\begin{aligned}\overline{K}_p&=\frac{\sum K_pW}{\sum W}=\frac{\sum K_pW}{100}\\&=\frac{43.743+14.319+11.297+3.313+3.941+5.063+14.490+6.524}{100}\\&=102.69\%\end{aligned}$$

计算结果表明，居民消费价格总水平上涨了 2.69%。也可以认为通货膨胀率为 2.69%，以此衡量的货币购买力指数为

货币购买力指数 = 1/居民消费价格指数 = 1/1.026 9 = 0.973 8 = 97.38%

计算结果表明，居民货币购买力下降了 1 - 97.38% = 2.62%，或者说，居民今年用 100 元所买到的商品数量，只相当于基期年用 97.38 元所买到的商品数量。

5.2.2 生产价格指数

工业生产指数是一种物量指数，它反映一个国家或地区各种工业产品产量的综合变动程度。我国编制工业生产指数是通过计算各种工业产品的不变价格产值来完成的。其基本编制过程是：首先，对各种工业产品分别制定相应的不变价格标准(记为 p_c)：然后，逐项计算各种产品的不变价格产值，加总起来就得到全部工业产品的不变价格总产值；将不同时期的不

变价格总产值加以对比，就得到相应时期的工业生产指数。

以 2000 年的价格作为不变价标准，2000 年至 2003 年的不变价格产值为：

$$\sum p_{2000}q_{2000},\ \sum p_{2000}q_{2001},\ \sum p_{2000}q_{2002},\ \sum p_{2000}q_{2003}$$

由以上资料计算 2001 年和 2003 年的工业生产指数如下：

2001 年工业生产指数 $$\overline{K}_{q2001}=\frac{\sum p_{2000}q_{2001}}{\sum p_{2000}q_{2000}}$$

2003 年工业生产指数 $$\overline{K}_{q2003}=\frac{\sum p_{2000}q_{2003}}{\sum p_{2000}q_{2000}}$$

5.2.3 股票价格指数

股票价格指数(简称股价指数)是综合反映整个股票市场价格变动的基本趋势的指标，被称为市场经济的“晴雨表”。在股价指数的编制方法中，综合指数是一种重要编制方法，其公式为：

$$\overline{I}_p=\frac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q}$$

式中，$\overline{I}_p$ 表示股票价格指数，p_1和 p_0分别表示报告期和基期的个体股票价格，q 表示个体股票的发行量(或交易量)。其中，发行量(或交易量)因素通常固定在基期水平上(即采用拉氏公式)，为的是简便和可比；但也可以固定在计算期水平上(即采用派氏公式)。

我国的上证 30 指数、香港恒生指数和美国的 SP500 指数等，都是采用综合公式编制的。以美国的 SP500 指数为例，该指数由美国的 S&P(Standard&Poor)公司逐年、逐月编制，目前其入编股票共计 500 种，其中包括 400 种工业股、20 种运输业股、40 种金融业股和 40 种公用事业股，对比基期为 1941 至 1943 年，采用拉氏公式，权数为基期各种股票的发行量。该指数具有较强的代表性和广泛的影响力。

除了综合指数方法之外，股价指数还可以采用其他方式编制。以著名的美国道·琼斯指数为例，其基本编制方法就是：对入编指数的各种股票分别计算不同时间的简单平均价格，通过对比就得到相应日期的股价指数。其计算公式为：

$$\overline{I}_p=\frac{\overline{p}_t}{\overline{p}_0}=\frac{\sum p_{ti}/n}{p_{0i}/n}=\frac{\sum p_{ti}}{\sum p_{0i}}$$

可见，该种股价指数实际上是运用平均指标指数方法编制的(故通常又被称为“道·琼斯股价平均数”)。式中没有加权的好处是：简化了资料的采集和指数的计算，也排除了结构变化对指数的影响。其缺点是：不能适当区分不同股票的重要性程度，也即将大小公司的股价变动同等看待。道·琼斯指数目前的入编股票为 65 种，其中包括 30 种工业股、20 种运输业股和 15 种公用事业股。

5.3 综合评价指数

5.3.1 综合评价概述

在经济管理中，需要对有关的经济活动进行评价，如检查计划、考核评分、验收定级等等。可以从某一侧面作出判断，这属于“单项评价”；也可以从多个不同的侧面对有关现象进行全面的综合判断，这就属于“综合评价”。

常规的综合评价方法有两种：一种是“简易计分法”，如体操比赛或歌唱竞赛中，裁判或评委给运动员或歌手评分时，多数就是采用这种方法。这种方法操作简便、快捷，但评分结果具有较大的主观随意性，为此要进行“掐头去尾”的处理(即去掉个别的最高分和最低分)，然后计算平均分。另一种常规方法是“参数指标法”，即首先选定综合评价所要考虑的几个主要方面的指标，然后以特定的方式将其结合起来，构成一个新的评价指标。

在编制综合评价指数的实践中，目前比较成熟、可行的方法主要有两种，即“标准比值法”和“功效系数法”。两者的区别，又主要表现为对比标准的确定方式不同。

5.3.2 标准比值综合评价指数

构建标准比值综合评价指数的具体方法如下：

(1) 建立综合评价指标体系。

我国采用的“工业经济效益综合指数”中规定了六项指标：工业产品销售率、资金利税率、成本利润率、增加值率、全员劳动生产率(人均增加值)和资金周转率(流动资金周转次数)等。

(2) 确定评价公式。

$$\overline{I}=\frac{\sum\frac{\text{实际值}}{\text{标准值}}\times\text{权数}}{\sum\text{权数}}=\frac{\sum\text{个体指数}\times\text{权数}}{\sum\text{权数}}=\frac{\sum I_iW_i}{100}$$

(3) 确定各项指标的评价标准和权数。

表 5-4 我国工业经济效益综合指数的标准值和权数

参评指标	计量单位	全国标准值	权数
产品销售率	%	97.48	15
资金利税率	%	13.55	30
成本利润率	%	8.41	15
增加值率	%	29.00	10
劳动生产率	元/人	6 205	10
资金周转率	次/年	1.83	20

可以简单地用各项指标的中等水平作为单一“标准值”，并依据各项评价指标的重要性程度赋予相应的权数。

（3）计算企业的个体指数和综合评价指数。

表 5－5　企业经济效益综合指数计算表

参评指标	单位	标准值	实际值	个体指数(%)	权数	指数×权数
产品销售率	%	97.48	98.50	101.05	15	15.157 5
资金利税率	%	13.55	14.20	104.80	30	31.440 0
成本利润率	%	8.41	7.40	87.99	15	13.198 5
增加值率	%	29.00	26.03	89.76	10	8.976 0
劳动生产率	元/人	6 205	6 852	110.43	10	11.043 0
资金周转率	次/年	1.83	1.95	106.56	20	21.312 0
合计	—	—	—	—	—	101.127 0

计算结果表明，企业经济效益综合评价指数为 101.13。

5.3.3　功效系数综合评价指数

采用“功效系数法”编制综合评价指数的主要特点是：用满意值和不允许值来确定个体指标的功效系数，通过加权平均法得到综合评价指数。其基本公式如下：

$$\overline{I}=\sum\sqrt[W]{\prod(d_i)^W}$$

或

$$\lg\overline{I}=\frac{\sum(\lg d_i)W_i}{100}=\sum\frac{(\lg d_i)W_i}{100}$$

式中，d_i 为功效系数(个体指数)，其计算方法为：

$$d_i=\frac{x_i-x_0}{x_1-x_0}\times 40+60$$

其中，x_i 表示实际值，x_0 表示不允许值，x_1 表示满意值。将计算值乘 40 加 60 的目的是使功效系数尽可能落在 60～100 之间。举例说明，见表 5－6。

表 5－6　企业经济效益综合指数计算表

指标	满意值	不允许值	权数 W	企业	d	$\lg d$	$(\lg d)W/100$
产品销售率	99.5	85.2	15	98.5	97.2	1.987 7	0.298 2
资金利税率	14.2	10.3	30	14.2	100	2	0.6
成本利润率	9.4	6.8	15	7.3	67.7	1.830 5	0.274 6
增加值率	30	25.5	10	28	82.2	1.915 0	0.191 5
劳动生产率	7 200	5 500	10	7 020	95.8	1.981 2	0.198 1
资金周转率	2	1.5	20	1.4	52.0	1.716 0	0.343 2
综合指数	—	—	100	—	—	—	1.905 601

计算结果表明，企业经济效益综合评价指数为 $\lg\overline{I}=1.905\,6$。

【本章小结】

统计指数是反映复杂现象的变化的统计方法。总指数包括综合指数和平均数指数。在编制总指数时，可根据具体情况选择拉氏指数编制方法或派氏指数编制方法。消费价格指数和股票价格指数都是重要的价格指数。

练习 5

1 给出某市场上四种蔬菜的销售资料如下表所示。

品种	销售额(元)		个体价格指数(%)
	基期	计算期	
白菜	990	1 050	106.06
黄瓜	558	470	85.23
萝卜	408	280	68.63
西红柿	500	510	102.00
合计	2 556	2 280	

要求：(1) 用基期加权的算术平均指数公式编制四种蔬菜的价格总指数；

(2) 用计算期加权的调和平均指数公式编制四种蔬菜的价格总指数；

(3) 比较两种公式编制出来的销售价格总指数的差异。

2 利用第 1 题的资料和计算结果，试计算蔬菜销售额变动中销售量总指数。

3 已知某地区 2005 年的农产品收购总额为 560 亿元，2005 年比上年的收购总额增长 14%，农产品收购价格总指数为 88%。试考虑，2005 年与 2004 年对比：

(1) 农民因交售农副产品共增加多少收入?

(2) 农副产品收购量增加了百分之几？农民因此增加了多少收入?

(3) 由于农副产品收购价格下降，农民又减少了多少收入?

(4) 验证以上三方面的分析结论能否保持协调一致。

4 下表是两个企业经济效益指标资料。

参评指标	单位	标准值	企业 A	企业 B	权数
产品销售率	%	97.48	98.50	95.05	15
资金利税率	%	13.55	14.20	13.80	30
成本利润率	%	8.41	7.40	8.40	15
增加值率	%	29.00	26.03	30.70	10
劳动生产率	元/人	6 205	6 852	710.43	10
资金周转率	次/年	1.83	1.95	2.20	20

试计算两企业的经济效益综合评价指数，并排序。

⑤什么叫指数？狭义的指数与广义的指数有什么不同？

⑥什么叫质量指标指数？什么叫数量指标指数？什么叫综合指数？

⑦什么是指数化因素？什么是同度量因素？

⑧什么叫平均指数？作为综合指数之变形的平均指数有哪几种？

⑨有人认为，不同商品的销售量是不同度量的现象，因为它们的计量单位可以不同；而不同商品的价格则是同度量的现象，因为它们的计量单位一样，都是货币单位。这种看法是否正确？如果不正确，有何问题？

⑩从计算范围和编制方法两个角度考虑，总值指数究竟是属于总指数还是个体指数？你能给予适当解释吗？

⑪某企业共生产三种不同的产品，有关的产量、成本和销售价格资料如下表所示：

产品种类	计量单位	基期产量	计算期		
			产量	单位成本	销售价格
A产品	件	270	340	50	65
B产品	台	32	35	800	1 000
C产品	吨	190	150	330	400

要求：

（1）分别以单位产品成本和销售价格为同度量因素，编制该企业的派氏产量指数；

（2）试比较说明：两种产量指数具有何种不同的经济分析意义？

⑫已知某地区2004年的农副产品收购总额为360亿元，2005年比上年的收购总额增长12%，农副产品收购价格总指数为105%。试考虑，2004年与2005年对比：

（1）农民因交售农副产品共增加多少收入？

（2）农副产品收购量增加了百分之几？农民因此增加了多少收入？

（3）由于农副产品收购价格提高5%，农民又增加了多少收入？

（4）验证以上三方面的分析结论能否保持协调一致。

⑬某厂生产情况如下：

产品	基期产值(万元)	报告期比基期产量增减(+ −)%
甲	280	+12.5
乙	320	+8.0
丙	675	−4.0
丁	225	−12.0
合计	1500	—

请根据上表资料计算该厂的产量总指数和因产量变动而增减的产值。

⑭2004年和2003年，某省消费品零售总额分别为1 851.36亿元和1 371.02亿元，2004年比2003年全省零售物价下降1.2%。请据此计算：

（1）2004年比2003年该省因零售价格变动而增减的消费品零售额。

（2）2004年比2003年该省消费品零售量总指数及零售量变动而增减的零售额。

（3）从相对数和绝对数方面验证零售价格、零售量和零售额三个指数的相互关系。

6 概率及其分布

学习目标　本章要掌握数据与概率的关系，从概率分布上把握统计的特点，特别要把正态分布及其概率计算方法作为学习的重点。

6.1 事件与概率

6.1.1 什么是概率？

在管理中我们会遇到许多不确定性的决策，例如，提高产品价格可能会导致销售量下降，但我们想知道这种可能性(“机会”)到底有多大？又例如，新投资赢利的“机率”有多大？等等。解决这些不确定性问题的基本前提是要掌握概率知识。

概率是衡量某一特定事件的机会或可能性的数量指标。概率的大小与事件有关。在自然界和社会经济中发生的事件通常是随机事件。在管理决策中经常遇到的是随机现象，要解决的通常是随机事件问题。

例如，我们关心一项工程的进度，它在第一阶段可能需要 2 个月或者需要 3 个月完成；在第二阶段可能需要 3 或 4 个月才能完成。这样，我们就可以估计出 4 种工程完成的可能情况：$2+3=5$，$2+4=6$，$3+3=6$，$3+4=7$。其中，最少需要 5 个月，最长需要 7 个月，最大可能性是在 6 个月完成。假设我们关心的问题是：整个工程可以在 6 个月以内完成，那么与这个事件有关的样本点有 3 个：(2,3)，(2,4)，(3,3)，记为 C，则有

$$C=\text{“工程在 6 个月内完成”的样本集}=\{(2,3),\ (2,4),\ (3,3)\}$$

我们还关心“工程少于 6 个月完成”和“工程超过 6 个月完成”的事件，分别记为 L 和 M，则有

$$L=\text{“工程在不超过 5 个月内完成”的样本集}=\{(2,3)\}$$
$$M=\text{“工程在至少 7 个月以上完成”的样本集}=\{(3,4)\}$$

事件是若干样本点的集合。C、L、M 是三个不同的事件。它们的概率分别为：

$$P(C)=P(2,\ 3)+P(2,\ 4)+P(3,\ 3)=1/4+1/4+1/4=3/4$$
$$P(L)=P(2,\ 3)=1/4$$
$$P(M)=P(3,\ 4)=1/4$$

6.1.2 概率的统计定义

如何理解概率与统计(大量观察)的关系呢？概率是度量随机现象中某个可能结果发生的可能性大小的数量指标。例如，我们要决策能否接受一批货物，就要对其质量进行检验。我们不可能每件都检验，而是从中任取几件。假如任取 5 件进行检验，可能会抽出“4 件合格品，1 件次品”，也可能抽出的是“3 件合格品，2 件次品”，如此等等，由此得出多种合格率。

每一种检验结果(合格率)都是随机的。我们所关心的问题是，接受这批货物的可能性有多大？这个可能性的大小就是用“概率”来描述的。又例如，一个优秀的篮球运动员在3米线投篮一次，投入篮筐是一个随机事件；一个新手在同一位置投篮一次的命中也是一个随机事件。在一次投篮中可能优秀运动员刚好未投中，而新手却碰巧投中，我们不能因此得出结论：“优秀运动员的投篮命中率小于新手。”可能性的大小要通过大量的观察才能确定。

历史上曾有数学家们记录下抛掷硬币的情况，观察出现正面次数的试验数据。抛掷硬币的试验次数4 040时，正面向上次数为2 048，其频率为0.506 9。当抛掷硬币的试验次数分别增大到12 000次和24 000次时，其频率分别为0.501 6和0.500 5，趋近于0.5。

于是，我们对概率的统计定义表述如下：在相同条件下，重复做 n 次试验，事件 A 出现了 m 次，当 n 很大时，频率 m/n 稳定在某个数值 p 的附近，当 n 趋近于 ∞ 时，频率 m/n 趋近于 p 值，则称 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A)=p$。

6.2 概率分布

6.2.1 数据波动与统计规律

如何观察数据波动的规律性？我们可以通过进一步了解数据的变异性特征来理解数据波动与概率的统计意义的关系。在一次试验中，试验数据之间的差别就是数据的异性。同一规格的两个零件在加工尺寸、性能上完全相同是不可能的。数据的变异性是普遍存在的。例如，一个生产电发火管产品的工厂，为了检验合格率，共收集了10个班次100个爆破压力的试验数据如表6－1所列。

表6－1 电发火管产品爆破压力的100个抽样数据

班次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1组	90.8	92.4	87.4	85.9	88.7	84.9	83.4	90.3	84.3	90.7
2组	95.1	88.3	89.8	78.5	93	92.5	86.2	81.9	87.7	90.8
3组	94.7	93.5	84.5	89.9	84.9	89.5	86.2	87.5	88.4	94.4
4组	90.4	94.7	88.6	102	87.6	76.7	86.5	87.9	87.4	94.6
5组	88.5	88.8	81.3	89.3	89.4	87.6	82.6	92.7	95.9	96.3
6组	91.7	93.7	92.5	86.9	87.6	92.3	85.7	88.4	79.6	92.6
7组	93.9	86.7	87.6	86.1	89.9	91.4	85.4	90.5	88.8	98.7
8组	92.7	87.8	93.8	83.7	82.7	90.7	82.8	75.2	86.7	92.7
9组	87.9	94	92.6	80.4	87.5	91.3	85.9	85.6	91.6	90.8
10组	98.7	94.5	90.3	87	86.7	88.4	89	84	88.4	88.3

以上数据反映了产品质量的数据始终存在波动性。由于数据总是在某一范围内波动，即多数在85～95之间，说明数据的波动存在某种规律性。要揭示数据的规律性，我们必须了解数据分布的特征。表6－2表示电发火管产品爆破压力值的频数分布情况。

表 6-2 频率分布表

组界	频率%	累积	组界	频率%	累积
75.05～78.05	2	2.00%	90.05～93.05	23	84.00%
78.05～81.05	3	5.00%	93.05～96.05	12	96.00%
81.05～84.05	8	13.00%	96.05～99.05	3	99.00%
84.05～87.05	18	31.00%	99.05～102.05	1	100.00%
87.05～90.05	30	61.00%	合计	100	—

依据频数分布情况进行统计分析如下：

(1) 电发火管的爆破压力值最大不超过 102.05，最小不低于 75.05；

(2) 有约 30% 集中在 87～90 之间；

(3) 有约 70% 大于 84 并小于 93；

(4) 小于 84 的约占 13%，大于 93 的约占 16%。

频数分布只是概率分布的具体表现形式，要了解概率分布的一般规律，就要从数学原理角度寻找概率分布曲线。

6.2.2 概率分布

频率分布与概率分布是怎样的关系呢？把产品质量频率分布的抽样误差和测量误差排除后，就转化为概率分布曲线，其分布就能完全反映产品质量的波动规律。该曲线称为分布密度曲线。分布密度曲线的数学表达式为分布密度函数，记为 $f(x)$，表达如图 6-1。

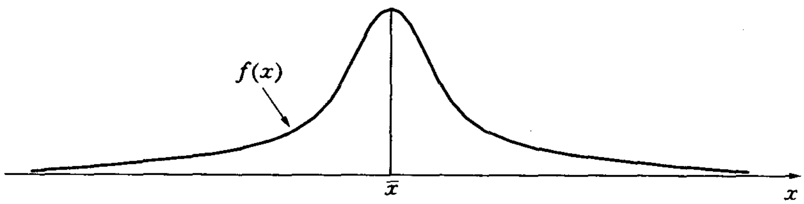


图 6-1 分布密度曲线

分布密度曲线 $f(x)$ 与横坐标 x 所夹的面积等于 1。

如何理解概率分布呢？概率分布是一种数学模型，它反映变量取值与其发生的概率之间的关系。其特点是：变量取值的精确度越高，相应的概率越小；变量取值的误差越大，相应的概率也越大。例如，取值在 80～90 的概率为 30%；取值在 60～110 的概率为 60% 等。

概率分布可以分为两种类型：离散型分布和连续型分布。图 6-1 所示分布曲线是正态分布曲线，反映的是连续型变量的分布规律。还有二项分布和泊松分布曲线，反映的是离散变量的分布曲线。正态分布则是最常见的、应用最广泛的一种分布。例如，人的身高、轴径的加工尺寸、测量误差等都服从正态分布。当产品质量受到众多因素影响，但无哪个因素起主要作用，质量特征值的变异分布一般都属于正态分布。

概率分布与直方图的关系是：概率分布所描述的是总体特征值的分布；直方图所描述的是样本特征值的分布。

6.3 正态分布

6.3.1 正态分布的特点

正态分布有如下特点(图 6-2)：

(1) 在均值的概率最大；

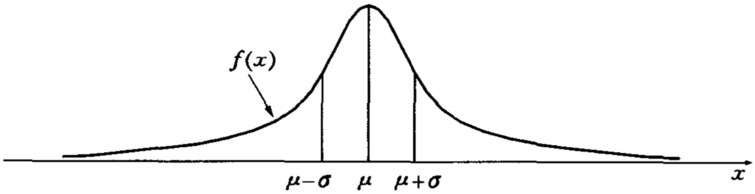


图 6-2 正态分布的特点

(2) 对称性；

(3) 数学模式

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

式中：x 为随机变量，如身高，理论取值范围为 $-\infty<x<\infty$；

e 为自然对数底 2.718 3。

π 为圆周率 3.141 6。

σ 为总体标准差；

μ 为总体均值。

(4) 两个重要参数 μ 和 σ。参数不同分布也不同(图 6-3)。对比如下：

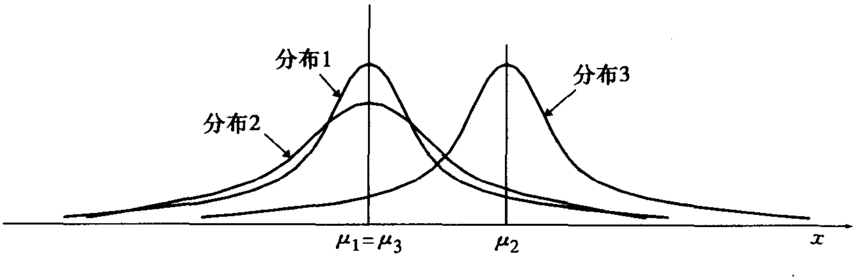


图 6-3 μ 和 σ 不同的概率分布比较

$\mu_3=\mu_1$，$\sigma_3>\sigma_1$：见分布 1 与分布 2；

$\mu_2>\mu_1$，$\sigma_2=\sigma_1$：见分布 1 与分布 3。

(5) 曲线对横轴是渐近的，区间与概率的关系(常用结论)：

$$p(|\mu-x|\leqslant t\sigma)=p(|x-\mu|\leqslant t\sigma)=1-\alpha$$

进一步，有

$$p(|\mu-x|\leqslant t\sigma)=p(x-t\sigma\leqslant\mu\leqslant x+t\sigma)=1-\alpha$$

或者

$$p(|x-\mu|\leqslant t\sigma)=p(\mu-t\sigma\leqslant x\leqslant\mu+t\sigma)=1-\alpha$$

式中：t——概率度；

α——小概率。

总体落在总体平均数 1 倍标准差周围的概率为 68.26%。即当 $t=1$ 时，则有

$$p(|x-\mu|\leqslant\sigma)=p(\mu-\sigma\leqslant x\leqslant\mu+\sigma)=1-\alpha=68.26\%$$

总体落在总体平均数 2 倍标准差周围的概率为 95.45%。即当 $t=2$ 时，则有

$$p(|x-\mu|\leqslant 2\sigma)=p(\mu-2\sigma\leqslant x\leqslant\mu+2\sigma)=1-\alpha=95.45\%$$

总体落在总体平均数 3 倍标准差周围的概率为 99.73%。即当 $t=3$ 时，则有

$$p(|x-\mu|\leqslant 3\sigma)=p(\mu-3\sigma\leqslant x\leqslant\mu+3\sigma)=1-\alpha=99.73\%$$

6.3.2 标准正态分布

标准正态分布是对变量 x 进行标准化处理的结果，即计算如下统计量

$$Z=(x-\mu)/\sigma$$

变量 Z 服从均值为 0 和标准差为 1 的标准正态分布，记为 $Z\sim N(0,1)$，其标准正态分布的密度函数可表达为

$$\varphi(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{Z^2}{2}}$$

当给定 C，求 $x\leqslant C$ 时，所对应的统计量 Z 的概率计算公式为

$$p(x\leqslant C)=p\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{C-\mu}{\sigma}\right)=p\left(Z\leqslant\frac{C-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)$$

或

$$p(|x|\leqslant C)=p\left(\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|\leqslant\frac{C-\mu}{\sigma}\right)=p\left(|Z|\leqslant\frac{C-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{C-\mu}{\sigma}\right)$$

当 Z 取值范围为 1，2，3 时，由图 6－4 可知，标准正态分布下的概率分别为：

$$p(|Z|\leqslant 1)=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=2\times 0.841\,345-1=68.27\%$$

$$p(|Z|\leqslant 2)=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1=2\times 0.977\,25-1=95.45\%$$

$$p(|Z|\leqslant 3)=\Phi(3)-\Phi(-3)=2\Phi(3)-1=2\times 0.998\,65-1=99.73\%$$

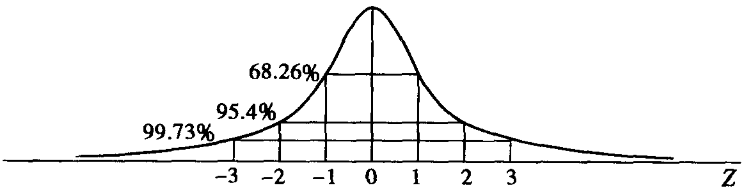


图 6－4 $|Z|\leqslant 1, 2, 3$ 的概率

6.3.3 概率的计算方法

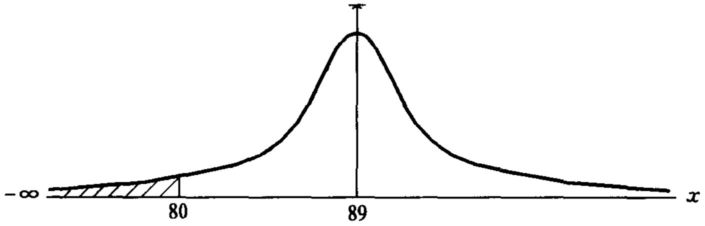
在应用中，当给定 C，求 $x\leqslant C$ 时所对应的统计量 Z 的概率计算公式为

$$p(x\leqslant C)=p\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{C-\mu}{\sigma}\right)=p\left(Z\leqslant\frac{C-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)$$

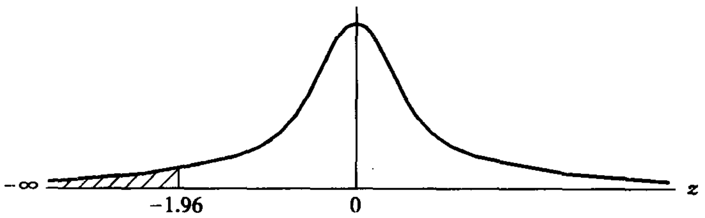
查《标准正态分布表》(本书附录2表3)，可得 $Z=(C-\mu)/\sigma$ 的概率。

例 6-1 已知均值为89，标准差为4.6，求 $x\leqslant80$ 的概率。

解：从图6-5a中寻找 $x=80$ 的位置。



(a)



(b)

图6-5 例6-1图示

其标准正态分布如图6-5b所示。$Z=(80-89)/4.6=-1.96$

查《标准正态分布表》得

$$\Phi(Z)=\Phi(-1.96)=1-\Phi(1.96)=1-0.975=0.025\,00$$

即 $x\leqslant80$ 的概率为2.5%。

例 6-2 已知均值为89，标准差为4.6，求 $x\leqslant90$ 的概率。

解：从图6-6中确定 $x=90$ 的位置。

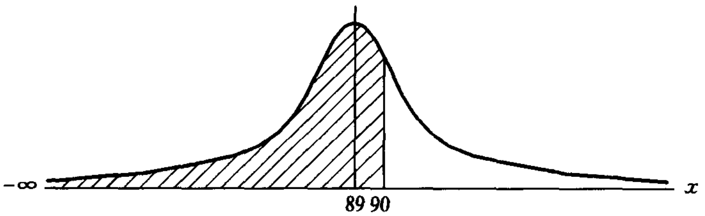


图6-6 例6-2图示

$$Z=(90-89)/4.6=0.22$$

查《标准正态分布表》，得 $\Phi(Z)=\Phi(0.22)=0.587\,1$。

即 $x\leqslant90$ 的概率为58.71%。

例 6-3 已知均值为89，标准差为4.6，求 x 在大于80和小于90的概率。

解：从图 6－7 中确定 x 大于 80 和小于 90 的位置。

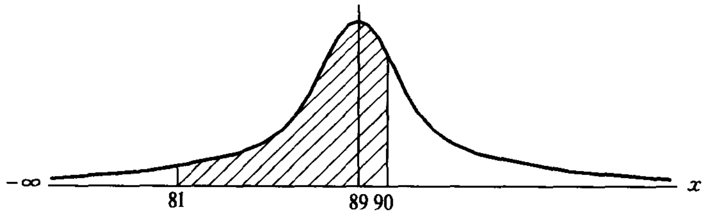


图 6－7 例 6－3 图示

$$Z_1=(80-89)/4.6=-1.96$$
$$Z_2=(90-89)/4.6=0.22$$

查《标准正态分布表》得

$$\Phi(Z_1)=\Phi(-1.96)=0.025$$
$$\Phi(Z_2)=\Phi(0.22)=0.5871$$

即

$$p(80\leqslant x\leqslant 90)=\Phi(Z_2)-\Phi(Z_1)=58.71\%-2.5\%=56.21\%$$

例 6－4 已知均值为89，标准差为 4.6，求 x 大于 90 的概率。

解：从图 6－8 中确定 x 大于 90 的位置。

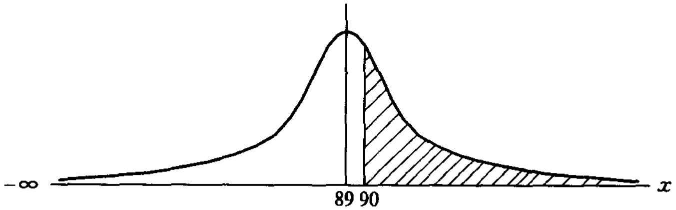


图 6－8 例 6－4 图示

$$p(x\geqslant 90)=1-p(x\leqslant 90)=1-\Phi(Z_2)=1-\Phi(0.22)=1-58.71\%=41.29\%$$

6.4 二项分布与泊松分布

6.4.1 二项分布

二项分布主要描述只有两种结果可能出现的事件的分布。这两种结果分别用“是”和“非”来区别。“是”与“非”出现的概率的情况，可通过以下例子了解。

例如，产品总数有 N 个；不合格品为“是”，记为“1”，有 N_1 个；合格品为“非”，记为“0”，有 N_0 个。

不合格率记为 p，则有 $p=N_1/N$，合格率记为 q，则有 $q=1-p=1-N_1/N$。

$p+q=1$，

$(p+q)^n=1$，

$(p+q)^n$ 的展开式等于 1。

n 为重复检验的次数，x 为产品是不合格品出现的次数。

对产品检验 n 次，出现 x 次不合格品的概率为

$$C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \qquad (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

式中，$C_n^x=\dfrac{n!}{x!(n-x)!}$表示 n 个产品取 x 个不合格品的组合数。

例 6－5 已知产品合格率为0.9，对产品检验 100 次，出现 2 次不合格品的概率为

$$C_{100}^2 0.1^2 0.9^{100-2}=9\,900\times0.001\times0.000\,033=0.000\,325$$

二项分布的均值为

$$\mu=np$$

标准差为

$$\sigma=\sqrt{npq}$$

由于概率 p 的取值不同，二项分布的形状有差异。当 $p=0.25$ 时，均值偏向中心值以下的小值一方；当 $p=0.5$ 时，均值处于中心位置；当 $p=0.75$ 时，均值偏向中心值以上的大值一方。所以，二项分布图形随着不合格率 p 的变化而变化，当 $p=0.5$ 时基本对称。

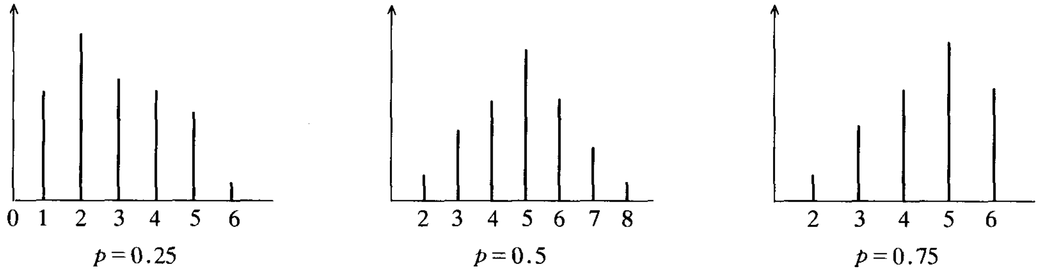


图 6－9 例 6－5 图示

二项分布与正态分布之间存在如下关系：

当 n 充分大时，二项分布直线顶部的连线图形趋于对称，近似于正态分布。

二项分布的累积概率：

在一批产品中，当不合格品超过 c 时，则拒绝接收。因此，接收的概率为

$$\begin{aligned} p(x\leqslant c) &= \sum_{x=0}^{c} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \\ &= C_n^0 p^0 q^{n-0}+C_n^1 p^1 q^{n-1}+C_n^2 p^2 q^{n-2}+\cdots+C_n^c p^c q^{n-c} \\ &(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ c) \end{aligned}$$

例 6－6 在一批不合格品率 $p=0.05$ 的精密铸件中（p 是长期统计的稳定值），按规定每一工作班抽取 5 件，并且被抽的 5 件铸件中不允许有不合格品，否则，需分析原因。试计算这种情况下铸件被接收的概率，并查《二项分布表》（附录 2 表 1）验证。

解：求在抽出的 5 次检验中，不出现不合格品的概率。

$$p(x\leqslant c)=\sum C_n^x p^x q^{n-x}$$

$$p(x=c=0)=C_5^0 0.05^0(1-0.05)^{5-0}=0.95^5=0.773\,8$$

查表结果完全一样。

例 6－7 在一批不合格品率 $p=0.05$ 的精密铸件中（p 是长期统计的稳定值），按规定每一工作班抽取 5 件，样本中不合格品数正好为 1 的接收概率为多少？

解：求在抽出的 5 次检验中，不合格品出现 1 次的概率：

解法一 $p(x\leqslant c=1)=p(x\leqslant 1)-p(c=0)$

$$=\sum C_5^1 0.05^1(1-0.05)^{5-1}-\sum C_5^0 0.05^0(1-0.05)^{5-0}$$

$$=0.9774-0.7738=0.2036$$

解法二 $p(x=c)=C_n^x p^x q^{n-x}$

$$p(x=c=1)=C_5^1 0.05^1(1-0.05)^{5-1}$$

$$=5\times 0.05\times 0.95^4=0.20363$$

6.4.2 泊松分布

泊松分布是主要描述稀有事件的分布。例如，在单位时间内电话交换台收到电话呼叫的次数、来到公共汽车站的乘客人数、布上的疵点、啤酒中的杂质等，也称为计点分布或疵点分布。泊松分布在取值范围上只取正整数和零($x=0$，1，2，3，…)，在疵点 x 处的概率为：

$$f(x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\qquad (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

泊松分布的均值和标准差为：

$$\mu=\lambda$$

$$\sigma=\sqrt{\lambda}$$

式中，λ 为常用样本的缺陷数的平均值估计。

泊松分布与二项分布的关系：可以证明，当 p 很小(小于0.1)，n 较大(大于总体0.1)，可用泊松分布作为二项分布的近似。

泊松分布与正态分布的关系：当 n 充分大时，泊松分布在每一点上的概率线条顶点的连线图形趋于对称，近似于正态分布。

泊松分布的累积概率：已知 p 和 n，则有 $np=\lambda$。不合格品 x 少于 c 的概率为

$$p(x\leqslant c)=\sum_{x=0}^{c}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

在实际应用中，通常用 np 估计 λ，即令 $np=\lambda$。

例 6-8 已知产品不合格品率 $p=0.02$，样本数 $n=15$，合格判定数 $c\leqslant 1$，由二项分布和泊松分布求出结果。

解：(1) 二项分布

$$p(n=15,\ p=0.02,\ c\leqslant 1)=p(x\leqslant 1)=\sum_{x=0}^{1}C_n^x p^x q^{n-x}=0.9647$$

(2) 泊松分布

$$\lambda=np=15\times 0.02=0.3,\ c\leqslant 1$$

$$p(x\leqslant c)=\sum_{x=0}^{c}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=0.963$$

(3) 结果：泊松分布计算出的概率较小。

例 6-9 试比较，当 $p=0.005$，$n=20$，$c\leqslant 1$ 时，二项分布和泊松分布的结论。

解：(1) 二项分布

$$P(20,\ 0.005,\ 1)=0.999$$

(2) 泊松分布

$$\lambda = nP = 0.01,\ c \leqslant 1$$

$$P(0.01,\ 1) = 0.999$$

（3）结论：可见，当 p 很小，n 较大时，两种分布的结论几乎完全一致。

【本章小结】

统计数据都具有随机性，并服从某种概率分布。概率论是统计学的数理基础，概率的正态分布、二项分布和泊松分布及其均值和标准差特征值是统计方法应用的理论依据。

练习 6

1 什么是概率？概率的统计定义是什么？

2 已知 9 名工人的日产量变量 x：105，115，115，125，125，125，135，135，145。作频数分布数列和直方图。

3 概率分布主要有几种类型，分别表现为哪些分布？

4 正态分布有哪些特点？

5 当给定 C，求 $x \leqslant C$ 时，所对应的统计量 Z 的概率计算公式是什么？

6 当 Z 的取值范围为 1、2、3 时，其对应的概率分别是多少？

7 在正态分布下，已知均值为 89，标准差为 4.6，求 x 在大于 70 和小于 100 的概率。

8 在正态分布下，已知均值为 89，标准差为 4.6，求 x 大于 100 的概率。

9 二项分布和泊松分布的共同点和不同点是什么？

10 如何计算二项分布和泊松分布的累积概率？

11 在一批不合格品率 $p=0.06$ 的精密铸件中（p 是长期统计的稳定值），按规定每一工作班，抽取 10 件，并且被抽的 10 件铸件中只允许有 1 件不合格品，否则，需分析原因。试计算这种情况下铸件被接收的概率，并查表(附录 2 表 1)验证。

12 在一批不合格品率 $p=0.06$ 的精密铸件中（p 是长期统计的稳定值），按规定每一工作班，抽取 6 件，样本中不合格品数正好为 0 的接收概率为多少？

13 已知产品不合格品率 $p=0.01$，样本数 $n=25$，合格判定数 $c \leqslant 1$，由二项分布和泊松分布求出两种结果。

14 已知 10 个零件中有 3 件次品，现不重复地随机抽取

（1）求两次都抽到正品的概率；

（2）求第三次才抽到正品的概率；

（3）如改为重复的随机抽取，求两次都抽到正品的概率。

15 一张考卷中有 15 道单项选择题，每题 4 个备选答案中，只有 1 个正确答案，一考生随机地选择答案。试求：

（1）答对 5 至 10 题的概率；

（2）至少答对 9 题的概率；

（3）答对的期望值。

⑯某公司有 400 人，平均工龄为 10 年，标准差为 3 年。现随机抽出 50 名组成一个简单随机样本，试问样本中工作人员的平均工龄不低于 9 年的概率有多大?

⑰某厂决定在工人中增发高产奖。按过去生产状况对月生产额最高的 5% 的工人发放高产奖。已知过去每人每月生产额 X(单位：千克)服从正态分布 $N(4\,000，60^2)$。试问高产奖发放标准应把月生产额定为多少?

7 抽样与区间估计

学习目标　本章要掌握抽样的原理，理解点估计、区间估计和抽样误差的关系，学会计算样本容量和不同抽样组织形式的抽样误差等。重点掌握抽样原理和区间估计方法。

7.1 抽样方法

7.1.1 抽样方法

抽样调查是实际中应用最广泛的一种调查方法，它是从调查对象的总体中随机抽取一部分单位作为样本进行调查，并根据样本调查结果来推断总体数量特征的一种非全面调查方法。例如，MDD 公司主要是以树木为原料生产和销售纸张等林产品的公司。管理人员为了准确估计公司未来所需原料的能力，并制定未来包括树木的长期种植和采伐时间表在内的计划，就要掌握关于木材及森林准确而可靠的信息。他们无法进行全面调查，而是通过抽样方法收集遍布森林的样本点数据。抽样点是随机抽取的，首先按照位置和树种将木材分成三部分，再使用地图和随机数表从每部分抽取 1/8～1/10 公顷的树木作为随机抽样点。抽样点是公司林务员收集数据和了解森林总体的地方。由全体林务员参加数据的搜集过程，他们三人一组定期收集每一抽样点中每棵树的信息。这些抽样数据被录入公司的森林永续存货计算机系统，该系统随时能提供关于树木类型、现有森林储量、森林以往生产率、未来计划森林生长和储量等大量数据频率分布的信息。

7.1.2 从有限总体中抽样

在抽样调查中，最普遍的是简单随机抽样。对一个由 TTA 公司 2 500 名管理人员组成的有限总体，设自有限总体容量 N 中抽取的样本容量 n，简单随机样本定义如下：如果随机样本中每个样本点以相等的概率被抽出，则称之为简单随机样本(有限总体)。

对于有限总体进行简单随机抽样时，最方便的做法是利用随机数表来完成。我们假定 TTA 公司的 2 500 名管理人员已经被依次标号(即 1，2，3，…，2 499，2 500)，我们要从中随机抽取 30 名管理人员，首先查看随机数表(见表 7－1)，如表中第一行的每个数字 1，7，7，…都是随机数，以相同的机会发生。由于 EAI 管理人员总体的最大标号为 2 500，是四位数，我们从表中每四位一组选择随机数，根据表 7－1 第一行，四位随机数有：

1 772　6 286　5 256　8 367　8 351　4 732　7 185　1 892　2 225　5 201　2 734　0 104

我们把数字不超过 2 500 的随机数选入随机样本中。这一过程一直继续下去，直到取得所希望的由 30 名管理人员组成的简单随机样本。

完成简单随机样本的选择过程中，当我们并不想将一个管理人员多次选入时，就可以忽略已出现过的随机数，这种选择样本的方式叫做“无放回抽样”。当我们选择样本时，对已经

出现过的随机数仍选入样本，则我们进行的是“放回抽样”。抽样程序中，放回抽样是一种取得简单随机样本的有效途径，然而，无放回抽样更为常用。

表 7－1 随机数表

17726	28652	56836	78351	47327	18518	92222	55201	27340	10493
36520	64465	05550	30157	82242	29520	69753	72602	23756	54935
81628	36100	39254	56835	37636	02421	98063	89641	64953	99337
84649	48968	75215	75498	49539	74240	03466	49292	36401	45525
63291	11618	12613	75055	43915	26488	41116	64531	56827	30825
70502	53225	03655	05915	37140	57051	48393	91322	25653	06543
06426	24771	59935	49801	11082	66762	94477	02494	88215	27191
10711	55069	29430	70165	45406	78484	31639	52009	18873	96927
41990	70538	77191	25860	55204	73417	83920	69468	74972	38712
72452	36618	76298	26678	89334	33938	95567	29380	75906	91807
37042	40318	57099	10528	09925	89773	41335	96244	29002	46453
53766	52875	15987	46962	67342	77592	57651	95508	80033	69828
90585	58955	53122	16025	84299	53310	67380	84249	25348	04332
32001	96293	37203	64516	51530	37069	40216	61374	05815	06714
62606	64324	46354	72557	67248	20135	49804	09226	64419	29457
10078	28037	85389	50324	14500	15562	64165	06125	71353	77669
91561	46145	24177	15294	10061	98124	75732	00815	83452	97355
13091	98112	53959	79607	52244	63303	10413	63839	74762	50289

使用随机数表可以从任何一个位置开始挑选随机数。一旦选择了一个任意的起点，则采用按行或按列或按斜角，选择一个一个的随机数。

现在假定已选取了一个由 30 名管理人员组成的简单随机样本，他们相应的年奖金及参加管理培训项目的数据见表 7－2。在管理培训项目这一栏，已经参加过管理培训项目的人员用“是”表示。

表 7－2 由 30 名管理人员组成的简单随机样本

年奖金(百元)	是否参加过管理培训	年奖金(百元)	是否参加过管理培训
490	是	517	是
533	是	525	否
496	是	449	是
498	是	519	是
476	否	529	是
559	是	451	是
490	是	517	是
514	是	543	否
509	是	501	否
551	是	529	否
459	是	502	否
572	否	527	否
556	是	509	是
515	否	558	是
561	否	573	否

7.1.3 从无限总体中抽样

商业和经济中的许多抽样活动是针对有限总体的，但是在某些情况下，总体太大时也可视为无限总体。在自无限总体的抽样中，由于不能对个体进行编号，在选择样本点时必须采用另一不同的过程。例如，假设我们想估计某一快餐店11:30～13:30 午饭时间顾客从点餐到拿到食品的平均时间，就要把所有可能光顾的顾客作为一个总体，这个总体是一个正在进行的过程，要列示或统计总体的每一个个体是不可能的，这时，通常认为总体是无限的。我们的目标是从无限总体中选出 n 个顾客作为简单随机样本。

如果一个来自无限总体的样本满足以下两个条件，则称该样本为简单随机样本(无限总体)：(1) 每个个体来自同一总体；(2) 各个个体的选择是独立的。在从快餐店光顾顾客抽取简单随机样本的问题中，只要任何顾客的光临都是发生在快餐店全体职工正常营业的午餐时间11:30～13:00 内，就应纳入该总体；挑选顾客时，只要采取一种措施确保某一顾客的入选与其他顾客的入选无关时，即挑选的顾客是独立的。那么，由此得到的总体就是一个简单随机样本(无限总体)。

需要强调的是，因为对于无限总体不能进行标号排列，所以抽样过程中不能用随机数。这时，必须专门制定一种独立选取样本点的抽样过程，以避免由于某些类型的个体以较大的概率(破坏随机原则)被选入而产生的偏差。这个快餐店选取样本的做法是：当一名顾客戴着眼镜走进来时，他之后的下一名顾客就是要被选入的样本。因为顾客是否戴着眼镜走进来纯属随机而独立的，所以满足来自无限总体的简单随机样本的两条件。

7.2 点估计和区间估计

7.2.1 点估计的方法

为了估计 ITA 公司 2 500 名管理人员的平均年奖金(μ)和奖金标准差(σ)的情况，用 30 个样本点采用点估计的方法时，就要计算样本平均值和样本标准差。

$$\text{样本平均值：} \bar{x} = \sum x / n = 15\,527/30 = 517.566\,7 \ \text{(百元)}$$

$$\text{样本标准差：} s = \sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 / (n-1)} = 33.463\,0 \ \text{(百元)}$$

为了估计 2 500 名管理人员中参加管理培训的比率(p)，计算出 30 名管理人员的样本中有 19 人完成了培训项目，则有

$$\text{样本比率：} \bar{p} = 19/30 = 0.63$$

通过以上计算，我们完成了称为点估计的统计过程。用样本统计量的值 517.57、33.46 和 0.63 作为总体参数的估计，得出 ITA 公司 2 500 名管理人员的年奖金平均数(μ)、奖金标准差(σ)和参加过管理培训的人员比率(p)分别为 51 757 元、3 346 元和 63% 的结论。

7.2.2 点估计的性质

采用样本统计量对相应总体参数进行点估计之前，我们必须了解这些样本统计量是否具有某些与良好的点估计量相联系的性质。点估计量的性质主要有：无偏性、有效性和一致性。

通常，θ 代表任一总体的参数，如总体均值、总体标准差和总体比率等等；$\hat{\theta}$ 代表相应的样本统计量，如样本均值、样本标准差和样本比率。

（1）无偏性

无偏性是指样本统计量的数学期望等于所估计的总体参数的值，即如果 $E(\hat{\theta})=\theta$，则称样本统计量是总体参数 θ 的无偏估计。式中 $E(\hat{\theta})$ 表示样本统计量 $\hat{\theta}$ 的数学期望。因此，样本无偏统计量的所有可能值的期望值或均值等于被估计的总体参数。

点估计的有偏和无偏的区别是：无偏估计量中，抽样分布均值与总体参数相等。在这种情形下，由于有时点估计量大于 θ，有时小于 θ，抽样误差可以相抵。但在有偏估计的情形下，抽样分布的均值比总体参数的值或大或小，抽样误差无法相互抵消。

样本均值和样本比率都是相应总体参数的无偏估计量。样本标准差 S 只有在分母是 $(n-1)$ 而不是 n 时，才是无偏估计量。如果分母是 n，则样本标准差为总体标准差的有偏估计量，从趋势上略为低估了总体标准差。

（2）有效性

$\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是含 n 个元素的一个简单随机样本用于给出同一总体参数的两个不同的无偏 $\hat{\theta}$ 点估计量，若 $\hat{\theta}_1$ 的标准差 $<\hat{\theta}_2$ 的标准差，这时，我们偏好于用标准差较小的点估计量 $\hat{\theta}_1$，因为它给出的估计值与总体参数更接近。有较小标准差的点估计量称作比其他点估计量更有效。

（3）一致性

在抽样估计中，样本容量越大，点估计量的值就越接近于总体参数，该点估计量就是一致估计量。换言之，大样本比小样本趋于推出一个更好的点估计。因为样本容量增大会降低抽样误差，所以大样本容量给出的点估计比小样本容量给出的点估计更接近于总体均值。从这个意义上说，样本均值是总体均值的一个一致估计量。同样的道理，我们也可以得出样本比率是总体比率的一个一致估计量。

在正态总体抽样时，总体均值与总体中位数相同，而中位数的标准误差大约比均值的标准误差大 25%。因此，样本均值更有效，并且落入总体均值特定范围的概率更大。

7.2.3 区间估计

从 2 500 名管理人员中随机抽出 30 名，抽样比率只有 12‰，依据其样本结果 517.57 和 0.63 来估计总体参数，必然会与总体参数存在抽样误差。

抽样误差是指点估计值与总体参数之差的绝对值，记为 Δ，则有

$$\Delta=|\bar{x}-\mu|=|\mu-\bar{x}|$$

总体均值的区间估计是指用样本均值以一定的概率落入总体均值附近范围来估计总体参数的方法。在概率为 $1-\alpha$ 时，则有

$$p(|\mu-\bar{x}|\leqslant\Delta)=p(|\bar{x}-\mu|\leqslant\Delta)=1-\alpha$$

总体均值 μ 落入样本均值 $\bar{x}$ 附近，误差为 Δ 的简化表达为：

$$\mu=\bar{x}\pm\Delta$$

例如，已知从 ITA 公司 2 500 名管理人员中抽出 30 名样本时，得知样本的年奖金平均值为 51 757 元，在概率为 95% 的年奖金抽样误差为 1 431 元，以此估计出全部管理人员的年奖金平均值将落入以下范围：

$$\mu = \bar{x} \pm \Delta = 51\ 757(\text{元}) \pm 1\ 431(\text{元})$$

即 ITA 公司 2 500 名管理人员的平均年奖金将以 95% 的概率保证落入 50 326 元与 53 188 元之间。

需要强调的是，样本平均值是一个随机变量，其估计结果犯错误的概率为 $\alpha = 1 - 95\% = 5\%$，估计误差范围为 1 431 元。

在样本容量(抽取的样本个数 n)为一定(30 个)时，要提高抽样估计的概率保证程度就要扩大抽样的误差范围；要提高抽样的精确度(减少抽样误差范围)，就要降低抽样的概率保证程度。为什么呢?

因为抽样误差 Δ 属于极限误差，它等于抽样平均误差的 t 倍。用 $\sigma_{\bar{x}}$ 表示抽样平均误差，则有

$$\Delta = t\sigma_{\bar{x}}$$

统计学家们研究了抽样极限误差 Δ 与抽样平均误差 $\sigma_{\bar{x}}$ 的比值或倍数 t 与概率之间的关系，得出 t 等于 1，1.96，2，3 时，概率则分别为 68.26%，95%，95.45%，99.73%。可见，提高概率保证程度就等于放大 t，在抽样平均误差 $\sigma_{\bar{x}}$ 不变条件下，极限误差 Δ 会随着 t 的放大而增加。这就是抽样误差与概率保证一同增减的原因。我们把极限误差 Δ 与抽样平均误差 $\sigma_{\bar{x}}$ 的比值或倍数 t，称为概率度。

如果要求提高概率保证程度的同时，又要求提高抽样的精确度，就必须扩大样本容量。又为什么呢?

因为抽样平均误差 $\sigma_{\bar{x}}$ 的变化是由样本容量决定的，在数学上可以证明，两者的关系如下：

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$$

式中，σ 表示总体标准差，它是个不变的常数；n 表示样本容量(样本抽取个数)。当扩大样本容量 n 时，抽样平均误差 $\sigma_{\bar{x}}$ 会变小，从而极限误差 Δ 也随之变小。它们的关系可表达如下：

$$\Delta = t\sigma_{\bar{x}} = t\sigma / \sqrt{n}$$

为了提高概率保证程度，同时也降低估计的误差范围，假设把概率保证程度提高到 99.73%，把极限误差减少到 1 000 元，样本容量应如何变化?

已知 $t = 3$，$\sigma = 3\ 998.92$，$\Delta = 1\ 000$，则有

$$n = (t\sigma / \Delta)^2 = (3 \times 3\ 998.92 / 1\ 000)^2 = 143.9 \text{ 取 } 144(\text{人})$$

可见，抽取的样本容量要由 30 人扩大到 144 人，才能满足以上抽样要求。

7.3 抽样误差与概率保证

7.3.1 样本容量与抽样平均误差的关系

简单地说，在有放回抽样条件下，样本容量越大抽样平均误差就越小，从数学上可以证明，两者的数量关系如下：

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$$

式中，$\sigma_{\bar{x}}$为抽样平均误差，σ 为总体标准差，n 为样本容量。总体标准差是一个常数，抽样平均误差随着样本容量的增大而减少。

例如，假设有 4 个人的年龄分别为 30 岁、40 岁、60 岁和 70 岁，分别用 x_1、x_2、x_3 和 x_4 表示，总体单位总数为 4，计算出这四人的平均年龄为 50 岁，标准差为 15.18 岁。

现在我们从这 4 个人中抽出 2 个人来推断总体平均年龄，一共有多少可能的结果呢？在有放回抽样条件下，有 16 个可能的结果，见表 7－3。

对例子中的总体参数和样本统计量的计算如下：

（1）总体参数

总体单位总数：$N=4$

总体均值：$\mu=\bar{x}=\sum x/N=(30+40+60+70)/4=50$，是惟一的。

总体方差：$\sigma^2=\sum(x-\mu)^2/N$

$$=[(30-50)^2+(40-50)^2+(60-50)^2+(70-50)^2]/4=250$$

总体标准差：$\sigma=15.81$，是惟一的。

（2）样本指标

样本容量：$n=2$

有放回抽样的样本可能配合数目：$N^n=4^2=16$

表 7－3 样本均值和标准差计算表

序号	样本值 1 x_1	样本值 2 x_2	样本均值 $\bar{x}$	抽样离差 $\Delta=\bar{x}-\mu$	离差平方 Δ^2
1	$x_1=30$	$x_1=30$	30	－20	400
2	$x_1=30$	$x_2=40$	35	－15	225
3	$x_1=30$	$x_3=60$	45	－5	25
4	$x_1=30$	$x_4=70$	50	0	0
5	$x_2=40$	$x_1=30$	35	－15	225
6	$x_2=40$	$x_2=40$	40	－10	100
7	$x_2=40$	$x_3=60$	50	0	0
8	$x_2=40$	$x_4=70$	55	5	25
9	$x_3=60$	$x_1=30$	45	－5	25
10	$x_3=60$	$x_2=40$	50	0	0
11	$x_3=60$	$x_3=60$	60	10	100
12	$x_3=60$	$x_4=70$	65	15	225
13	$x_4=70$	$x_1=30$	50	0	0
14	$x_4=70$	$x_2=30$	55	5	25
15	$x_4=70$	$x_3=60$	65	15	225
16	$x_4=70$	$x_4=70$	70	20	400
合计	—	—	800	—	2 000

样本均值：$\bar{x}=\sum x/n=(x_1+x_2)/2$，$\bar{x}$ 是随机变量，有 16 个样本均值，见表 7－2。

样本均值的平均数：$\bar{\bar{x}}=\sum\bar{x}/N^n=800/16=50$，$\bar{\bar{x}}$ 只有一个，不是随机变量，恒等于

总体均值，即：$\bar{\bar{x}}=\mu=50$。

抽样离差(抽样误差)：$\Delta=\bar{x}-\mu$，是随机变量，有16个。

样本均值的方差：$\sigma_{\bar{x}}^2=\sum(\bar{x}-\mu)^2/N^n=\sum\Delta^2/N^n=2\,000/16=125$，是随机变量。

样本均值的标准差(抽样平均误差)：$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{125}=11.18$，也是个随机变量。

我们关心的是总体参数与样本统计量之间的关系，于是得出如下结果：

$$\sigma_{\bar{x}}=\sigma/\sqrt{n}=15.81/\sqrt{2}=11.18$$

可见，样本均值的标准差(抽样平均误差)是总体标准差的$1/\sqrt{n}$倍。

当从$N=4$的总体中抽出3人时，则有样本的可能配合数目达到$N^n=4^3=64$个，由此计算出样本均值的平均数仍然等于50，但样本均值的标准差(抽样平均误差)却减少为：

$$\sigma_{\bar{x}}=\sigma/\sqrt{n}=15.81/\sqrt{3}=9.128$$

抽样平均误差的减少与样本均值更加集中有关(见表7-4和图7-1)。

表7-4 样本容量扩大前后抽样分布的比较

样本均值	组中值	$n=3$	$n=3$的比率	$n=2$	$n=2$的比率
25.5～32.5	29	1	0.016	1	0.063
32.5～39.5	36	6	0.094	2	0.125
39.5～46.5	43	13	0.203	3	0.188
46.5～53.5	50	24	0.375	4	0.250
53.5～60.5	57	13	0.203	3	0.188
60.5～67.5	64	6	0.094	2	0.125
67.5～74.5	71	1	0.016	1	0.063
合计	—	64	1.000	16	1.000

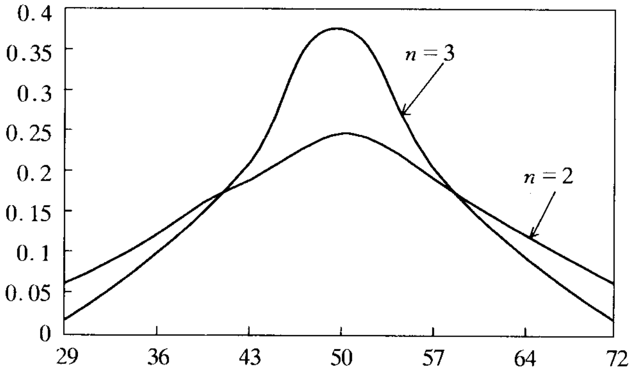


图7-1 样本容量扩大后样本平均数分布更集中

7.3.2 抽样误差与概率保证程度的关系

当已知总体标准差时，抽样平均误差是由样本容量决定的。在以上例子中，$N=4$，总体标准差为 $\sigma=15.81$。当样本容量为 $n=2$ 时，$\sigma_{\bar{x}}=\sigma/n=15.81/\sqrt{2}=11.18$；当样本容量为 $n=3$ 时，$\sigma_{\bar{x}}=\sigma/n=15.81/\sqrt{3}=9.13$。

当抽样平均误差一定时，极限误差是由概率度决定的，有

$$\Delta=t\sigma_{\bar{x}}$$

样本均值 $\bar{x}$ 落入总体均值 μ 附近的 $\pm\Delta$ 范围内的频率 f/N^n 就是我们要计算的概率。

表 7－5 抽样极限误差与概率度的关系

$n=2$ $\sigma_{\bar{x}}=11.18$ $N^n=16$					$n=3$ $\sigma_{\bar{x}}=9.13$ $N^n=64$				
t	$\Delta=t\sigma_{\bar{x}}$	$\bar{x}-\Delta\leqslant\mu\leqslant\bar{x}+\Delta$	f_1	$f_1/16$	t	$\Delta=t\sigma_{\bar{x}}$	$\bar{x}-\Delta\leqslant\mu\leqslant\bar{x}+\Delta$	f_2	$f_2/64$
1	11.18	38.8～61.2	10	0.625	1	9.13	40.8～59.1	42	0.656
1.96	21.91	28.1～71.9	16	1	1.96	17.89	32.1～67.9	62	0.968
2	22.36	27.6～72.4	16	1	2	18.26	31.7～68.3	64	1

在 $n=2$ 的情况下，当 $t=1$ 时，样本均值 $\bar{x}$ 落入总体均值 1 个抽样平均误差范围内，即 $\mu\pm\Delta=50\pm1\times11.18$ 或 38.8～61.2，极限误差为 11.18，频数为 10，频率为 62.5%，这与理论概率 68.26% 有点接近。

在 $n=3$ 的情况下，当 $t=1$ 时，样本均值 $\bar{x}$ 落入总体均值 1 个抽样平均误差范围内，即 $\mu\pm\Delta=50\pm1\times9.13$ 或 40.8～59.1，极限误差为 9.13，频数为 42，频率为 65.6%，这与理论概率 68.26% 更加接近。

随着 n 的增加，当 $t=1$ 时，频率将趋近于理论概率 68.26%。

当 $t=1.96$ 时，抽样的极限误差随之扩大，样本均值落入扩大后的总体均值附近范围的概率也相应增大。$n=2$ 时，极限误差扩大到 21.91，频率提高到 100%；$n=3$ 时，极限误差扩大到 17.9，频率提高到 96.8%，与理论概率 95% 接近。

当 $t=2$ 时，理论概率为 95.45%。

当 $t=3$ 时，理论概率为 99.73%。

关于 t 值与理论概率的关系可查《t 分布表》(附录 2 表 5)。用图表示如图 7－2。

7.4 总体均值和总体比率的区间估计

7.4.1 总体均值的区间估计(总体方差已知)

例 7－1 金盛机械厂生产圆管产品的直径 x 服从方差为 0.05 的正态分布。从产品中随机抽取 6 个，测得其直径(单位：厘米)分别为 4.8，5.3，5.1，5，4.7，5.1。在 0.95 的置

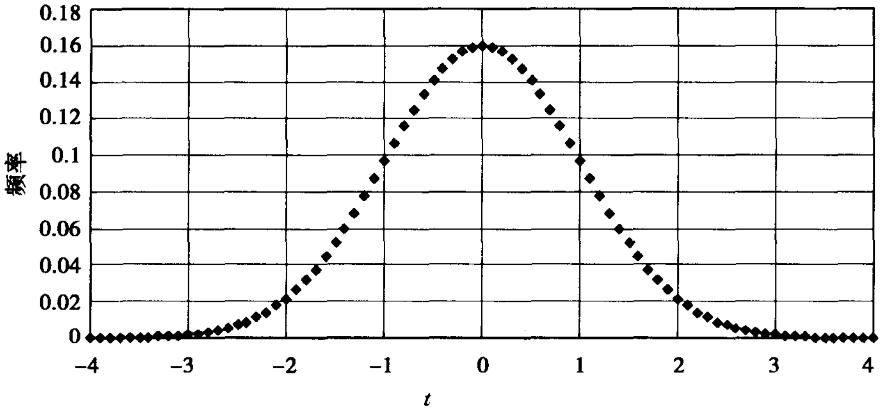


图 7－2　样本均值标准正态分布情况

信度下，试求该产品直径的均值的置信区间。

解：$1-\alpha=0.95$，查《正态分布分位表》(附录 2 表 4)得 $Z=1.96$

样本均值 $\bar{x}=\sum x/n=30/6=5$

抽样平均误差 $\sigma_{\bar{x}}=\sigma/\sqrt{n}=\sqrt{0.05/6}=0.009$

抽样极限误差 $\Delta=Z\sigma_{\bar{x}}=1.96\times0.009=0.0176$

所求的置信区间为：$\mu=\bar{x}\pm\Delta=5\pm0.0176$ 即(4.98，5.02)厘米

当样本容量相当大时，即使总体分布形式未知或总体为非正态分布，由抽样分布的定理可知，当样本容量充分大时，无论总体分布形式如何，样本均值近似服从正态分布，因此估计总体均值的方法与上述方法相同。

7.4.2　总体均值的区间估计(总体方差未知，大样本)

大样本情况下，当总体方差未知而用样本方差代替时，由于抽样分布可用正态分布近似，所以对总体均值的估计也采用上述方法。

例 7－2　立新公司有1 000名管理人员，采用不重复抽样从中随机抽取 100 人调查他们的当月业余学习时间，样本人均学习时间为 20 小时，样本标准差为 5 小时，试以 95.45% 的置信度估计平均学习时间的抽样极限误差和置信区间。

解：$N=1\,000$，总体分布不知是否为正态分布，但 $n=100\geqslant30$，属大样本。$1-\alpha=0.9545$，查《正态分布分位表》正态分布表得 $Z=2$。样本均值 $\bar{x}=20$，样本标准差 $S=5$。

在不重复抽样条件下，其抽样平均误差比重复抽样的抽样平均误差小$(1-n/N)$倍。当样本容量占总体单位数的比重很小时，可以忽略修正系数$(1-n/N)$。

抽样平均误差 $\sigma_{\bar{x}}=(S/\sqrt{n})\sqrt{1-n/N}=(5/\sqrt{100})\sqrt{1-100/1\,000}=0.474$(小时)

抽样极限误差 $\Delta=Z\sigma_{\bar{x}}=2\times0.474=0.949$(小时)

所求的置信区间为：$\mu=\bar{x}\pm\Delta=20\pm0.949$ 即(19.05，20.95)小时。

7.4.3　总体均值的区间估计(总体方差未知，小样本，正态总体)

根据抽样分布定理，小样本条件下，如果总体是正态分布的，总体方差(σ^2)未知而需要

用样本方差(S^2)来代替，$S^2=\dfrac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}$，式中，$n-1$ 表示失去一个自由度，则随机变量服从 $t(n-1)$分布。已知 α 时，可查自由度为 $n-1$ 的《t 分布表》(附录2表5)。

例7-3 广源商场从一批袋装食品中随机抽取10袋，测得每袋重量(单位：克)分别为：389，380，394，362，402，413，370，385，410，406。要求以95%的把握程度，估计这批食品的平均每袋重量的区间范围及其允许误差。

解：总体方差未知，样本容量 $n=10<30$，属于小样本。$1-\alpha=0.95$，查自由度为 $n-1$的《t 分布表》得 $t=2.262\,2$。

样本均值 $\bar{x}=\sum x/n=391.1/10=391.1$(克)

样本方差 $S^2=\sum(x-\bar{x})^2/(n-1)=2\,642.9/9=293.66$

抽样平均误差 $\sigma_{\bar{x}}=S/\sqrt{n}=\sqrt{293.66/10}=5.419$

抽样极限误差 $\Delta=t\sigma_{\bar{x}}=2.262\,2\times5.419=12.258\,8$(克)

所求的置信区间为：$\mu=\bar{x}\pm\Delta=391.1\pm12.26$ 即(378.8，403.3)克。

7.4.4 总体均值的区间估计小结

综上所述，无论总体方差是否已知，总体均值的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间可表示为：

$$\mu=\bar{x}\pm\Delta$$

在大样条件下，总体方差未知，样本方差 $S^2=\sum(x-\bar{x})^2/(n-1)$，则有

$$\mu=\bar{x}\pm\Delta=\bar{x}\pm Z\sigma_{\bar{x}}=\bar{x}\pm ZS/\sqrt{n}$$

在小样本条件下，样本方差 $S^2=\sum(x-\bar{x})^2/(n-1)$，查 $t(n-1)$分布表，则有

$$\mu=\bar{x}\pm\Delta=\bar{x}\pm t\sigma_{\bar{x}}=\bar{x}\pm tS/\sqrt{n}$$

在对总体平均数进行区间估计的基础上，可进一步推断相应的总量指标，即用总体单位总数 N 分别乘以总体平均数的区间下限和区间上限，便得到相应总量(N)的区间范围。

例如，已知从ITA公司2 500名管理人员中抽出30名样本时，得知样本的人均年奖金平均值为51 757元，在概率为95%的年奖金抽样极限误差为1 431元，以此估计出全部管理人员的年奖金总额将落入以下范围：

$N\mu=N(\bar{x}\pm\Delta)=2\,500\times(51\,757\pm1\,431)$

$=129\,392\,500\pm3\,577\,500$ 即(12 581.5，13 297.0)万元。

7.4.5 总体比率的区间估计

对于品质变量来说，当变量 x 的取值是“1”和“0”两种情况时，它们相应的频率可记为 P 和 $1-P$，变量均值和方差分别为

总体均值：$\mu=1\times p+0\times(1-p)=p$

总体方差：$\sigma^2=(1-p)^2p+(0-p)^2(1-p)=p(1-p)$

对总体比率进行估计时，在符号形式上有变化，其抽样的基本原理不变。无论总体方差是否已知，总体比率的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间可表示为：

$$P=p\pm\Delta_p$$

在大样本条件下，总体方差未知，样本方差 $S_p^2=p(1-p)$，则有

$$P=p\pm\Delta_p=p\pm Z\sigma_p=p\pm ZS_p/\sqrt{n}$$

在小样本条件下，样本方差 $S^2=p(1-p)$，查 $t(n-1)$分布表，则有

$$P=p\pm\Delta_p=p\pm t\sigma_p=p\pm tS_p/\sqrt{n}$$

用总体比率推断相应的总量指标 NP 的置信区间则为：

$$NP=N(p\pm\Delta_p)$$

例 7－4 大华棉织厂对一批产品的质量进行抽样检验，采用重复抽样抽取样品 200 只，样本优质品率为 85%，试计算当把握程度为 90% 时优质品率的区间范围。如果这批产品量为 3 000 只，问其中优质品将落入什么范围？

解：$N=3\,000$，$n=200>30$，属于大样本。$p=85\%$，总体方差未知，样本方差 $S_p^2=85\%\times15\%=0.127\,5$，由 $1-\alpha=90\%$ 查《正态分布分位表》(附录 2 表 4)得 $Z=1.645$，则有

优质品率 $P=p\pm\Delta_p=p\pm Z\sigma_p=p\pm ZS_p/\sqrt{n}$

$=85\%\pm1.645\times0.127\,5^{1/2}/200^{1/2}=85\%\pm4.15\%$ 即(80.85%，89.15%)。

优质产品总数 $NP=3\,000\times(85\%\pm4.15\%)$即(2 425.5，2 674.5)只。

7.5 样本容量的确定

7.5.1 样本容量的确定

样本容量是指样本中含有的总体单位数。在重复抽样条件下，样本容量由下式中 3 大因素决定：

$$n=(Z\sigma/\Delta)^2$$

在不重复抽样条件下，样本容量由下式中 4 个因素决定：

$$n=Z^2\sigma^2/(\Delta^2+Z^2\sigma^2/N)$$

例 7－5 双汇食品公司要检验本月生产的10 000袋调料产品的重量，根据上月资料，这种产品每袋重量的标准差为 25 克。要求在 95.45% 的概率保证程度下，平均每袋重量的误差范围不超过 5 克，应抽查多少袋产品？

解：已知 $N=10\,000$，$\sigma=25$，由 $1-\alpha=95.45\%$ 查得 $Z=2$，$\Delta\leqslant5$，求 $n=?$

不重复抽样公式 $n=Z^2\sigma^2/(\Delta^2+Z^2\sigma^2/N)=2^2\times25^2/(5^2+25^2/10\,000)=99.75$ 取 100(袋)。

重复抽样公式 $n=Z^2\sigma^2/\Delta^2=2^2\times25^2/5^2=100$(袋)。

为什么这两个公式计算的结果非常接近呢？这是因为总体单位总数很大的缘故。当 N 很大时，使 $Z^2\sigma^2/N$ 趋近于 0，两个公式趋于相等。因此，在实际抽样工作中，往往用重复抽样公式来计算应抽取的样本容量数目，既经济又有保证程度。

在比率抽样条件下，确定样本容量的方法与上相同。但当总体方差未知时，应采用与最大方差 0.5×0.5 接近的样本方差来计算样本容量问题。

例 7－6 大华棉织厂一批棉纱产品进行质量检验，这批产品的总数为 5 000 绽，过去几次同类调查所得的产品合格率为 93%、95% 和 96%，为了使合格率的允许误差不超过 3%，在 99.73% 的概率下应抽查多少绽产品？

解：已知 $N=5\,000$，由 $1-\alpha=99.73\%$ 查得 $Z=3$，$\Delta\leqslant3\%$，总体方差未知，但知道三

次同类调查的样本合格率分别为 93%、95% 和 96%，应取合格率接近 50% 的值 93% 作为总体方差的估计资料，因为它能满足其他抽样的要求。

重复抽样公式 $n = Z^2\sigma^2/\Delta^2 = 3^2 \times 93\% \times 7\% /(3\%)^2 = 651$(绽)。

7.5.2 影响样本必要抽样数目(样本容量)的因素

在抽样调查中，把抽样数目大于 30 的样本称为大样本，而把抽样数目小于 30 的样本称为小样本。抽样一般采用大样本，但抽样数目的多少，不仅仅与抽样误差有关系，还与调查费用有直接的关系。如果抽样数目过大，虽然抽样误差很小，但调查工作量增大，耗费的时间和经费太多，体现不出抽样调查的优越性。反之，如果抽样数目太小，抽样误差增大，抽样推断可能导致失误。所以，在抽样设计中科学确定必要的抽样数目非常重要。必要的抽样数目就是指使抽样误差不超过给定的允许范围至少应抽取的样本单位数目。从上述公式和例题可见，必要的抽样数目(n)受以下因素影响：

(1) 总体方差(或总体标准差 σ)。其他条件不变的情况下，总体单位的差异程度大，则应多抽，反之可少抽一些。在抽样之前，如果不知道总体方差的实际值，也无样本资料来代替，就用以前同类调查的资料代替。如果有多个方差数值可供选择时，应选其中最大的方差。

(2) 允许误差范围 Δ。允许误差增大，意味着推断的精度要求降低，在其他条件不变的情况下，必要的抽样数目可减少；反之，缩小允许误差，就要增加必要的抽样数目。

(3) 置信度$(1-\alpha)$。因$(1-\alpha)$与 Z 是同方向变化的，所以在其他条件不变的情况下，要提高推断的置信程度，就必须增加抽样数目。

(4) 抽样方法。相同条件下，采用重复抽样应比不重复抽样多抽一些样本单位。不过，总体单位数 N 很大时，两者差异很小。所以，为简便起见，实际中当总体单位数很大时，一般都按重复抽样公式计算必要的抽样数目。

(5) 抽样组织方式。由于不同抽样组织方式有不同的抽样误差，所以，在误差要求相同的情况下，不同抽样组织方式所必需的抽样数目也不同。上述公式只是简单随机抽样下确定必要抽样数目的公式。一般说来，其他条件不变时，类型抽样、等距抽样和整群抽样都比简单随机抽样的精确度高，在相同精确度条件下所需要的样本必要数目少。

7.6 分层抽样和整群抽样

7.6.1 分层抽样

分层抽样又叫分类抽样或类型抽样。它是按与调查目的有关的某个主要标志将总体单位划分为若干层(也称类、组或子总体)，然后从各层中按随机原则分别抽取一定数目的单位构成样本。

例 7－7 对 W 地区的居民户在一年内用于打电话的支出进行了等比例分层抽样，调查结果如表 7－6 所示。

表 7-6 分层抽样计算表

类型	调查户数(n_i)	平均支出($\bar{x}_i$)	方差 S_i^2
城镇	$n_1=40$	$\bar{x}_1=2\,100$	$S_1^2=380$
农村	$n_2=80$	$\bar{x}_2=830$	$S_2^2=210$
合计	120	—	—

要求以 95% 的置信度估计该地区居民户电话费年平均支出的区间。

解：$1-\alpha=95\%$，查得 $Z=1.96$。

样本均值 $\bar{x}=\sum\bar{x}_i n_i/n=(2\,100\times40+830\times80)/(40+80)=1\,253.33$（元）

样本层内方差 $\overline{S_i^2}=\sum S_i^2 n_i/n=(380\times40+210\times80)/(40+80)=266.667$

抽样平均误差 $\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\overline{S_i^2}/n}=\sqrt{266.67/120}=1.490\,7$

抽样极限误差 $\Delta=Z\sigma_{\bar{x}}=1.96\times1.490\,7=2.921\,8$（元）

每户平均话费支出额的置信区间为：$\mu=x\pm\Delta=1\,253.333\pm2.92$ 即(1 250.41，1 256.25)元。

分层抽样是通过分组来提高样本的代表性的。这是因为分层后总体方差被划分成多个内部差异较小的子总体，把这些差异较小的方差平均后还是较小。由于各层都抽取，各层之间就不存在抽样误差问题。分层抽样条件下不考虑层间方差，层内方差小于简单随机抽样的样本方差。因为，在分组条件下，总方差=层内方差+层间方差，总有层内方差小于总方差，所以，与简单随机抽样相比，分层抽样的效果更好。即

$$\text{样本总方差}(S^2)=\text{层内方差}(\overline{S_i^2})+\text{层间方差}(\delta^2)$$

由于 δ^2 总会大于等于 0，必然有$\overline{S_i^2}$小于等于S^2，从而有简单随机抽样的抽样平均误差 $S/\sqrt{n}\geqslant$分层抽样的抽样平均误差$\sqrt{\overline{S_i^2}/n}$。

在抽样技巧方面，分层抽样首先就要确定各层的抽样数目，这就涉及各层的抽样比例是相等还是不等的问题。实际中常常采用等比例分层抽样，这样做比较简便。

7.6.2 等距抽样

等距抽样是一种特殊的分层抽样，也叫机械抽样或系统抽样。它是先将总体单位按某一标志排队，再按固定的顺序和间隔来抽取样本单位。相当于分层抽样中对总体进行等距分层的做法。等距抽样最显著的优越性是能提高样本单位分布的均匀性，样本代表性较强。当然，如果只是对总体进行无关标志编号，这样的等距抽样与简单随机抽样差不多。

需要注意的是，等距抽样的起点值可以随机地确定，以后各点会依此全部被确定下来。

7.6.3 整群抽样

整群抽样是将总体全部单位分为 R 群，然后按随机原则从中抽取 r 群，对抽中的群内进行全面调查，而未抽中群一概不调查。因此，整群抽样只存在群间方差，不存在群内方差。例如，居民家计调查或人口抽样调查，常常以一个乡(或街道)的所有住户或所有人口为

一群，并对抽中乡(或街道)的住户或人口进行全面调查。又如，要从某天8小时内生产的产品中抽取1/12进行质量检查，可按5分钟内生产的产品为一群，将全天产品分为96群，再从中随机抽1/12即8群进行检查。

整群抽样只需对各群体进行编号和调查，大大简化了抽样组织工作，实践中应用十分广泛。但如果样本单位在总体中的分布不够均匀，在其他条件相同的情况下，整群抽样的样本代表性可能较差，因为整群抽样的抽样误差取决于群间差异程度的大小，而不受各群体内部差异程度的影响。整群抽样的抽样平均误差公式为：

$$\sigma_x = \frac{\delta_{\bar{x}}}{\sqrt{r}}\sqrt{1-\frac{r}{R}}$$

式中，R 为总体群数，r 为样本群数；$\delta_{\bar{x}}$ 为群间标准差。

通常，总体群间方差未知，要用样本群间方差 S_{δ^2} 来估计，有

$$S_{\delta^2} = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{r-1}$$

例7-8 GF商场有水果饮料300箱，每箱12瓶，现随机抽取6箱检查每瓶的含菌数，测得这6箱的平均每瓶含菌数(个)分别为：82，60，76，50，60，65。要求推断这批饮料的平均含菌数的区间(置信度为95%)。

解：$1-\alpha=95\%$，查得 $t(6-1)=2.570\,6$。

样本平均数 $x=\sum x/r=(82+60+76+50+60+65)/6=65.5$(个)

样本群间方差 $S_{\delta^2}=\sum(x_i-\bar{x})^2/(r-1)$

$$=[(82-65.5)^2+(60-65.5)^2+\cdots+(65-65.5)^2]/(6-1)$$
$$=683.5/5=136.7$$

抽样平均误差 $\sigma_{\bar{x}}=\frac{\delta_{\bar{x}}}{\sqrt{r}}\sqrt{1-\frac{r}{R}}=\sqrt{\frac{136.7}{6}(1-\frac{6}{300})}=4.725$(个)

总体含菌平均数的区间估计 $\mu=\bar{x}\pm\Delta=\bar{x}\pm t\sigma_{\bar{x}}$

$$=65.5\pm2.570\,6\times4.725=65.5\pm12.146$$

即(53.35，77.65)(个)。

在整群抽样过程中，划分群体的原则是：应使群间差异尽可能小，使各群体内的总体单位之间的差异尽可能大。整群抽样对群体的划分可以是人为的，也可以是自然形成的。人为划分群体通常可以要求群体大小相等或接近，如产品分装、职工分班组等。自然形成的群体则往往大小不等，如按街道、乡村划分居民群体等。当群体大小相等或接近时，样本群体的抽取和参数估计都比较简单。当群体大小悬殊时，宜采用与群体规模成比例的不等概率的抽样方法来抽取样本群体，其参数估计的公式也有所不同。因此，为简便起见，划分群体时应使各群体所含的总体单位数尽可能相等。

7.6.4 多种抽样方式灵活运用

在实际工作中，选择适当的抽样组织方式，主要应考虑调查对象的性质特点，对调查对象的了解程度(抽样框的特点)，抽样误差的大小以及人力、财力和物力的条件等方面。一般地说，比较复杂的抽样组织方式如分层抽样、按有关标志排队等距抽样有较小的抽样误差，但需要花费较多的人力、物力和财力，而且必须事先掌握总体各单位的有关信息以便适当地

分组或排队；相反，较为简单的抽样组织方式，抽样误差较大，但耗费也较少，事先不需要了解总体的很多信息。

实际中通常还灵活地将两种或多种抽样组织方式结合使用，使抽样工作更简便、更经济或使抽样误差更小。如分层抽样与等距抽样结合而产生分层等距抽样，即先按与调查目的有关的主要标志将总体分为若干层(类)，在各层内采用等距抽样抽取样本单位，这种方式集中了分层抽样和等距抽样之所长，当然也要求事先掌握较多的信息。此外，对大规模的抽样调查，总体单位很多而且分布面广，从总体中直接抽取样本单位很困难，也不便搜集样本资料，这就需要采用多阶段抽样。多阶段抽样指分两个或两个以上的阶段来完成抽取样本单位的过程。如我国的城市职工家计调查采用三阶段抽样：先抽选调查城市，再从抽中城市中分部门抽选基层单位，最后从抽中的基层单位中抽取调查户。多阶段抽样可根据需要和可能，将几种抽样组织方式结合运用。一般在前面阶段选择分层抽样或有关标志排队等距抽样，而在后面阶段采用简单随机抽样或无关标志排队等距抽样。

简单随机抽样、分层抽样、等距抽样和整群抽样是四种基本的抽样组织方式。简单随机抽样是最基本的抽样组织方式，其常用方法有抽签法、利用随机数表取数法和电子计算机取数法。简单随机抽样对总体单位不进行任何划分或排队，完全随机地直接从总体中抽取样本单位，使每个总体单位都有完全均等的机会被抽中，故简单随机抽样又称纯随机抽样。它只需对总体单位进行编号，而不要求事先掌握更多的总体信息。正因为如此，简单随机抽样的估计效率也比较低，进行较大规模的抽样调查时，其抽样组织工作也不易开展。所以，在大规模抽样调查中常常采用分层抽样、等距抽样或整群抽样。

【本章小结】

抽样是用样本指标推断总体指标的一种统计调查方法，样本的代表性是保证抽样调查效果的关键。抽样原理是关于抽样分布的基本理论，对弄清样本与总体的关系、样本容量与抽样误差的关系、概率保证与极限误差的关系等方面，具有非常重要的意义。抽样方式对抽样效果也有影响作用。

练习 7

1 什么叫抽样？怎样抽样？

2 什么是抽样平均误差、抽样方差、抽样极限误差？它们之间有何关系？

3 确定必要的抽样数目有何意义？必要抽样数目受哪些因素影响？

4 基本的抽样组织方式有哪几种？它们各有什么特点？它们的抽样平均误差如何计算？

5 什么叫点估计？什么叫区间估计？

6 区间估计的基本思想是什么？

7 某地区粮食播种面积共 6 000 亩，按不重复抽样方法随机抽取了 100 亩进行实测。调查结果，平均亩产为 550 公斤，亩产量的标准差为 65 公斤。试以 95% 的置信度估计该地区粮食平均亩产量和总产量的区间。

8 某地对上年栽种的一批树苗(共 10 000 株)进行了抽样调查，随机抽查的 300 株树苗

中有210株成活。试以95.45%的概率估计该批树苗的成活率的置信区间和成活总数的置信区间。

⑨某车间生产的螺杆直径服从正态分布 $N(\mu, 0.3^2)$，现随机抽取5只，测得直径(单位：mm)为：22.3，21.5，22.0，21.8，21.4，试求直径 μ 的95.45%的置信区间。

⑩已知某种电子管的使用寿命服从正态分布。从一批电子管中随机抽取16只，检测结果，样本平均寿命为2 050小时，标准差为310小时。试求这批电子管的平均寿命的置信区间(置信度为99.73%)。

⑪某厂日产某种电子元件2 000只，最近几次抽样调查所得的产品不合格率分别为4.6%、3.5%、5%，现为了调查产品不合格率，问至少应抽查多少只产品，才能以95.45%的概率保证抽样误差不超过2%？

⑫某企业对职工用于某类消费的支出进行了等比例分层抽样，调查结果如下表：

	职工人数(人)	调查人数(人)	平均支出(元)	标准差(元)
青年职工	2 600	130	230	60
中老年职工	1 800	90	140	47

试以95.45%的概率估计该企业职工平均支出和总支出的置信区间。

⑬某公司购进某种商品600箱，每箱内装5只。随机抽取30箱，并对这30箱内的商品全部进行了检查。根据抽样资料计算出合格率为95%，各箱合格率之间的方差为4%。试求合格率的抽样平均误差，并以68.27%的把握程度对这批产品的合格率作出区间估计。

⑭什么是样本总体？它和全及总体有什么区别和联系？

⑮为什么放回抽样分布的误差总是大于不放回抽样分布的误差？原因何在？

⑯假定10亿人口大国和100百万人口小国的居民年龄变异程度相同，现在各自用放回抽样的方法抽取本国10万人口计算平均年龄，问两国平均年龄的抽样平均误差是否相同，或哪国比较大？如果各自用同样的方法抽取本国1%人口计算平均年龄，抽样平均误差又当如何？

⑰某小组5个工人的周工资分别为120、140、160、180、200元，现在用放回抽样的方法从中抽出2个工人的工资构成样本。要求：

(1) 计算总体工人平均工资和标准差；

(2) 列出样本平均工资的抽样分布；

(3) 计算样本平均工资的平均数，并检验是否等于总体平均工资；

(4) 计算样本平均工资的标准差；

(5) 按公式计算抽样平均误差，并验证是否等于(4)的结果。

⑱本期全体托福考生的平均成绩为580分，标准差为150分，现在随机抽取100名考生成绩，试用正态逼近法估计样本平均成绩在560～600分之间的概率是多少？样本平均成绩在610以上的概率是多少？

⑲从某县的100个村庄中随机抽出10个村，对选中的村庄进行整村调查，调查结果得平均每户饲养家禽35头，各村的平均数的方差为16头，试在95.45%的概率保证程度下，推断该县饲养家禽户均头数的区间范围。

8 假设检验

学习目标 本章要求掌握假设检验的基本思想、检验步骤和两类错误以及与区间估计的关系。重点掌握假设检验中显著性水平的设定与小概率原理应用之间的关系。

8.1 假设检验的思想

8.1.1 假设检验解决的问题

假设检验在管理中应用非常广泛。例如，HKL 公司是通信设备的主要生产商，绝大多数产品都需要大批量生产并检验。主产品 RF 板由 16 个电器元件组成，在制造阶段的焊接过程中，发现板上的焊接质量未能达到产品质量标准的要求。经过对大量可能影响焊接过程的因素进行考虑之后，一位工程师初步确定，这一焊接问题极可能是由于 RF 板的表层有疵点而引起的。

该工程师想知道在公司存货中表层有疵点的 RF 板所占的比率是否超过了供应商设计规格中所指定的值。令 p 代表公司的 RF 实际存货中表层有疵点的板所占的比率，p_0 代表供应商设计规格中所指定的值，建立如下假设：

H_0：$p \leqslant p_0$

H_a：$p > p_0$

H_0 表明公司存货中表层有疵点的板所占的比率未超过供应商设计中所指定的值。如果能够断定该比率是可以接受的，则工程师需要另行寻找引起焊接问题的原因。H_a 表明公司存货中表层有疵点的板所占的比率超过了供应商设计规格中所指定的值，如果是这样，就可以确认表层有疵点就是引起焊接问题的主要原因，应当采取措施解决存货中表层疵点比率过高问题。

这位工程师进行假设检验的结果表明，结论 H_0 是真的，应该拒绝 H_0，即认为公司存货中表层有疵点的 RF 板所占的比率未超过供应商设计规格中所指定的值。通过对存货的进一步调查发现，贮存的隔板受到了污染是导致这一比率过高的原因。因此，该工程师认为，改变贮存环境是解决焊接流量达到产品质量标准的重点。

8.1.2 假设检验的主要思想

为了进一步了解假设检验的主要思想，我们分析一个有具体数据的例子。已知，某企业过去生产某种零件的平均长度为 4 厘米，标准差为 0.1 厘米。改革工艺后，抽查了 100 个零件，测得样本平均长度为 3.94 厘米。现问：工艺改革前后零件的长度是否发生了显著的变化？

这是关于工艺改革前后零件的平均长度(总体平均数)是否等于 4 的假设检验问题。

我们知道，样本平均长度与原平均长度出现差异不外乎两种可能：一是改革后的总体平均长度不变，但由于抽样的随机性使样本平均数与总体平均数之间存在抽样误差；二是由于工艺条件的变化，使总体平均数发生了显著的变化。因此，可以这样推断：如果样本平均数与总体平均数之间的差异不大，未超出抽样误差范围，则认为总体平均数不变；反之，如果样本平均数与总体平均数之间的差异超出了抽样误差范围，则认为总体平均数发生了显著的变化。

根据样本平均数的抽样分布定理，有 $\mu=\bar{x}\pm Z\sigma_{\bar{x}}$ 或 $|\bar{x}-\mu|/\sigma_{\bar{x}}\leqslant Z$。当 $Z=0$ 时，表明样本均值等于总体均值，即 $\bar{x}=\mu$；当 Z 很大时，表明样本均值离总体均值很远，即 Δ 很大。后一种情况是小概率事件。在正常情况下，小概率事件是不会发生的，那么在一次抽样中小概率事件居然发生了，我们就有理由认为样本均值是不正常的，它与原总体的性质已经发生变化，应该拒绝接受。

假设检验的关键和艺术之处，在于恰当地确定临界值 Z 发生的小概率是多少，记为 α。

通常人们认为，当 $\alpha\leqslant 5\%$ 时就是小概率。也有人认为小于 1% 或 1‰才是小概率。无论如何，一旦 α 值被确定下来，就可以查《正态分布分位表》找到相对应的 Z_α。这个 Z_α 值就是我们要衡量的 $|\bar{x}-\mu|/\sigma_{\bar{x}}$ 是否不等于 0 的理论值。在双侧检验条件下，与 α 对应的是 $Z_{\alpha/2}$ 值。

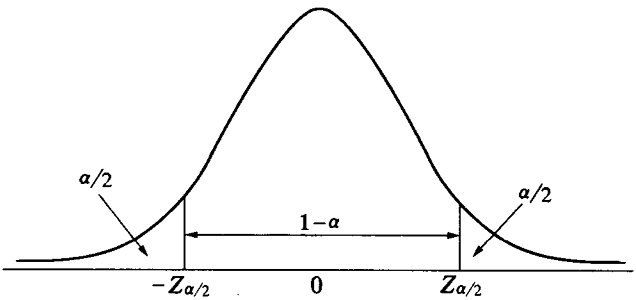


图 8－1 双侧检验

当 $|\bar{x}-\mu|/\sigma_{\bar{x}}=Z\leqslant Z_{\alpha/2}$ 时，我们就接受 $\bar{x}$，即认为样本来自原总体，或与原总体无质的区别，其误差来自抽样本身。

当 $|\bar{x}-\mu|/\sigma_{\bar{x}}=Z>Z_{\alpha/2}$ 时，我们就拒绝接受 $\bar{x}$，即认为样本与原总体已经发生了质的变化，其误差并不是来自抽样本身，而来自于生产条件等的变化。

本例中，$\bar{x}=3.95$，$\sigma=0.1$，$n=100$，假设 $\mu=4$，给定 $\alpha=0.01$ 则有 $Z_{\alpha/2}=2.58$。于是，可计算得：

$$Z=|\bar{x}-\mu|/\sigma_{x}=|\bar{x}-\mu|/(\sigma/\sqrt{n})=|3.95-4|/(0.1/\sqrt{100})=5>Z_{\alpha/2}=2.58$$

而 $|\bar{x}-4|/(\sigma/\sqrt{n})>Z_{\alpha/2}=2.58$ 是个小概率($\alpha=0.01$)事件。这一事件在 100 次抽样中才可望发生一次。而在一次抽样中，这一小概率事件居然发生了，这是不合理的。所以，应否定原假设，即推断工艺改革前后零件的长度有了显著的变化。

由上例可见，假设检验的基本思想是带有概率性质的反证法。具体说来，假设检验主要有以下两个特点：

第一，假设检验所采用的逻辑推理方法是反证法。为了检验某个假设是否成立，先假定

它是正确的，然后根据抽样理论和样本信息，观察由此假设而导致的结果是否合理，从而判断是否接受原假设。

第二，这里的合理与否，所依据的是“小概率事件实际不可能发生的原理”。即在一次观察中小概率事件发生了，则认为原假设是不合理的；反之，小概率事件没有出现，则认为原假设是合理的。所以，假设检验的反证法是带有概率性质的反证法，并非严格的逻辑证明。因为假设检验是基于样本资料来推断总体特征的，而这种推断是在一定的置信概率下进行的。如例中，拒绝原假设这一推断结果是在 $\alpha=0.01$ 的置信水平下得出的，也就是说，这一推断结果有 99% 的把握程度。

8.2 假设检验的步骤与两类错误

8.2.1 假设检验的步骤

进行假设检验要经过提出假设、计算统计量、给定显著性水平、查出临界值、比较判断等几个步骤。

（1）提出原假设和备择假设

对每个假设检验问题，一般可同时提出两个相反的假设：原假设和备择假设。原假设又称零假设，是正待检验的假设，记为 H_0；备择假设是拒绝原假设后可供选择的假设，记为 H_1。原假设和备择假设是相互对立的，检验结果二者必取其一。接受 H_0，则必须拒绝 H_1；反之，拒绝 H_0 则必须接受 H_1。

原假设和备择假设不是随意提出的，应根据所检验问题的具体背景而定。常常是采取“不轻易拒绝原假设”的原则，即把没有充分理由不能轻易否定的命题作为原假设，而相应地把没有足够把握就不能轻易肯定的命题作为备择假设。

一般地，假设有三种形式：

①H_0：$\mu=\mu_0$；H_1：$\mu\neq\mu_0$。这种形式的假设检验称为双侧检验。例中可以提出如下假设：H_0：$\mu=4$ 厘米；H_1：$\mu\neq4$ 厘米。

②H_0：$\mu=\mu_0$；H_1：$\mu<\mu_0$(或 H_0：$\mu\geqslant\mu_0$；H_1：$\mu<\mu_0$)。这种形式的假设检验称为左侧检验，如图 8－2 所示。

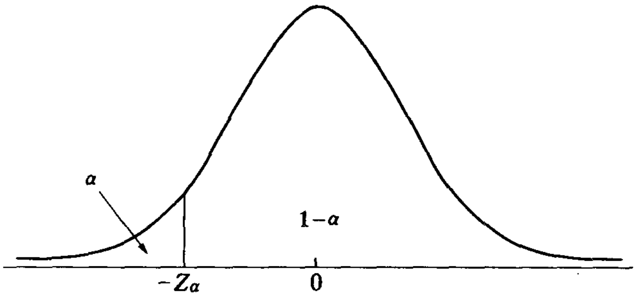


图 8－2　左侧检验

③H_0：$\mu=\mu_0$；H_1：$\mu>\mu_0$(或 H_0：$\mu\leqslant\mu_0$；H_1：$\mu>\mu_0$)。这种形式的假设检验称为右

侧检验。

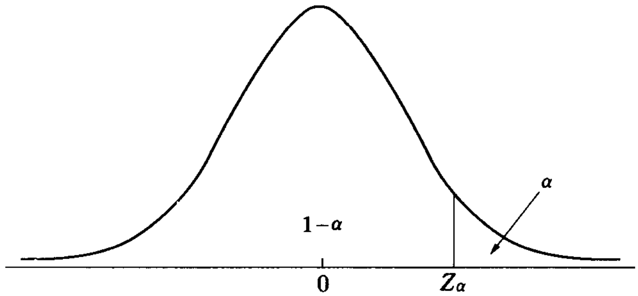


图 8－3 右侧检验

左侧检验和右侧检验统称为单侧检验。采用哪种假设，要根据所研究的实际问题而定。如果对所研究问题只需判断有无显著差异或要求同时注意总体参数偏大或偏小的情况，则采用双侧检验。如果所关心的是总体参数是否比某个值偏大(或偏小)，则宜采用单侧检验。在本例中，如果我们在乎的是零件长度是否比原来有所缩短，则可采用单侧检验，即 H_0：$\mu=4$ 厘米(或 $\mu\geqslant4$ 厘米)；H_1：$\mu<4$ 厘米。

(2) 选择适当的统计量，并确定其分布形式

不同的假设检验问题需要选择不同的统计量作为检验统计量。在例中，我们所用的统计量是 Z，在 H_0 为真时，$Z\sim N(0,1)$。

(3) 选择显著性水平 α，确定临界值

显著性水平表示 H_0 为真时拒绝 H_0 的概率，即拒绝原假设所冒的风险，用 α 表示。假设检验就是应用了小概率事件实际不发生的原理。这里的小概率就是指 α。但是要小到什么程度才算小概率？对此并没有统一的标准。通常取 $\alpha=0.1$，0.05，0.01。给定了显著性水平 α，就可由有关的概率分布表查得临界值，从而确定 H_0 的接受区域和拒绝区域。临界值就是接受区域和拒绝区域的分界点。

(4) 作出结论

根据样本资料计算出检验统计量的具体值，并用以与临界值比较，作出接受或拒绝原假设 H_0 的结论。如果检验统计量的值落在拒绝区域内，说明样本所描述的情况与原假设有显著性差异，应拒绝原假设；反之，则接受原假设。

8.2.2 假设检验中的两类错误

在作出接受或拒绝原假设 H_0 的结论时，是基于样本信息来判断的。由于样本的随机性，使所作结论出现两类错误。

(一)第一类错误

当原假设 H_0 为真，但由于样本的随机性使样本统计量落入了拒绝区域，这时所作的判断是拒绝原假设。这类错误称为第一类错误，亦称拒真错误。如例中，有的认为“一次抽样中小概率事件发生了”是不合理的，从而作出了拒绝原假设的结论。但事实上，小概率事件只是发生概率很小而已，并非绝对不发生。

犯第一类错误的概率，亦称拒真概率，它实质上就是前面提到的显著性水平 α，即

$P\{$拒绝$H_0|H_0$为真$\}=\alpha$。

(二)第二类错误

当原假设 H_0 为不真，但由于样本的随机性使样本统计量落入接受区域，这时的判断是接受原假设。这类错误称为第二类错误，亦称取伪错误。假如例中真实情况是工艺改革前后零件的平均长度不相等，但是所抽查样本的平均长度却正好接近 4 厘米，即在(4 ± 0.0258)厘米的范围内，这时按检验规则应接受原假设。这就犯了第二类错误。犯第二类错误的概率亦称取伪概率，用 β 表示，即 $P\{$接受$H_0|H_0$不真$\}=\beta$。

由上可见，接受原假设时，只是因为没有发生小概率事件，还没有充足的理由拒绝它(即还没有足够的把握拒绝它)。因此，所谓"接受原假设"，并非肯定原假设就是正确的，其含义应是"不否定原假设"或"保留原假设"，即意味着原假设可能为真，尚需进一步检验证实。

假设检验中，原假设 H_0 可能为真也可能不真，我们的判断(决策)有接受和拒绝两种。因此，检验中共有四种可能情况，可概括为表 8－1。

表 8－1 两类错误的比较

	H_0 为真	H_0 为不真
接受 H_0	正确决策	第二类错误(取伪)，概率为 β
拒绝 H_0	第一类错误(拒真)，概率为 α	正确决策

8.2.3 两类错误的概率 α 和 β 的关系

由于抽样的随机性，在假设检验中要完全避免两类错误是不可能的，只能尽量控制犯错误的概率。一个好的检验法则总是希望犯两类错误的概率都很小，但两者是互为消长的。在一般场合，当 n 固定时，减少 α 必然导致β增大；反之，减少 β 必然会增大α。以利用 Z 统计量进行右侧检验的情况为例：

$\alpha=P(Z>Z_\alpha|H_0$ 为真)

$\beta=P(Z\leqslant Z_\alpha|H_0$ 为真)

要使 α 小，则临界值 Z_α 增大，而 Z_α 增大必然导致β增大。反之，要使 β 小，则必然导致 α 增大。两者的关系如图 8－4 所示。

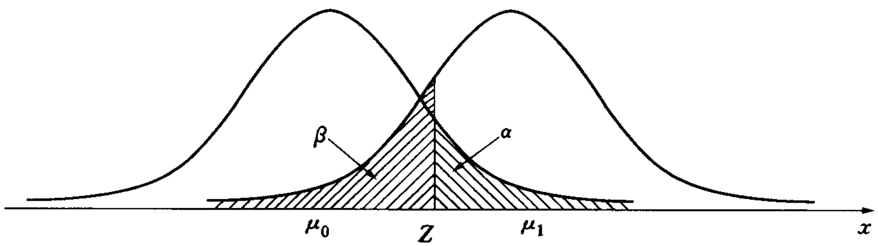


图 8－4 两类错误的关系

在检验中，对 α 和β 的选择取决于犯两类错误所要付出的代价。若拒真所付的代价较

大，则应取较小的 α 而容忍较大的 β；反之，若取伪所付的代价更大，则不得不取较大的 α 以求较小的 β。通常的做法是先确定 α，也即原假设为真时拒绝它的概率事先得到控制。由此再次可见，原假设是受到保护而不轻易否定的。

若要同时减少 α 和 β，或给定 α 而使 β 减少，就必须增大样本容量 n。因为增大 n，就能降低抽样平均误差，样本统计量的分布更集中，分布曲线更尖峭，从而可使分布曲线尾部的面积 α 和 β 都减少。

β 的大小不仅与临界值有关，而且还与原假设的参数值 μ_0 与总体参数的真实值 μ 之间的差异大小有关。此差异越大，β 就越小。因为此差异越大，就越容易鉴别出样本来自哪一总体，取伪的可能性就会降低。如图 8－4 中，当原假设 H_0 不真而备择假设 H_1 为真时，若真值 μ_1 右移，使真值与原假设的参数值的差异 $(\mu_1-\mu_0)$ 增大，则以 μ_1 为中心的分布曲线随之而右移，从而该曲线左尾的阴影部分即 β 也随之而缩小。

统计学中把 $(1-\beta)$ 称为检验功效，它表示当原假设不真实时拒绝它的概率，也即反映了肯定备择假设的能力大小。$(1-\beta)$ 较高，意味着检验做得较好。给定 α 的情况下，使 β 最小或 $(1-\beta)$ 最大的检验叫做最佳检验。

8.3 总体均值检验

8.3.1 总体均值的假设检验(总体方差已知)

假设检验按对象和方法的不同，可分为总体均值检验、总体比率检验和总体方差检验等。其中，总体均值检验中又分为总体方差已知和总体方差未知两种情况。

利用服从正态分布的统计量 Z 进行的假设检验称为 Z 检验法。根据已知的总体方差、样本容量 n 和样本平均数 $\bar{x}$，计算出检验统计量 Z 的值。对于给定的检验水平 α，查正态分布表可得临界值，将所计算的 Z 值与临界值比较，便可作出检验结论。

例 8－1 根据过去大量资料，HL 厂生产的保温产品的使用寿命服从正态分布 $N(\mu=1\,020,\ \sigma^2=100^2)$。现从最近生产的一批产品中随机抽取 16 件，测得样本平均寿命为 1 080 小时。试在 0.05 的显著性水平下判断这批产品的使用寿命是否有显著提高？

解：根据题意，提出假设：H_0：$\mu=1\,020$，H_1：$\mu>1\,020$

$$\text{检验统计量}\ |Z|=|\bar{x}-\mu_0|/\sigma_{\bar{x}}=|\bar{x}-\mu_0|/(\sigma/\sqrt{n})$$
$$=|1\,080-1\,020|/(100/\sqrt{16})=2.4$$

由 $\alpha=0.05$，查《正态分布分位表》(附录 2 表 4)得临界值 $Z_\alpha=1.645$。

由于 $Z=2.4>Z_\alpha=1.645$，所以应拒绝 H_0 而接受 H_1，即这批产品的使用寿命确有显著提高。

8.3.2 总体均值的检验(总体方差未知)

总体方差未知，对总体均值的检验不能用上述 Z 检验法，因为此时的检验统计量 Z 中包含了未知参数 σ。为了得到一个不含未知参数的检验统计量，很自然会用总体方差的无偏估计量——样本方差 S^2 来代替 σ，于是得到 t 统计量。t 统计量在 H_0 成立时分布为：

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

利用服从 t 分布的统计量去检验总体均值的方法称为 t 检验法。

例 8-2 CS 厂采用自动包装机分装产品，假定每包产品的重量服从正态分布，每包标准重量为 1 000 克。某日随机抽查 9 包，测得样本平均重量为 986 克，样本标准差为 24 克。试问在 0.05 的检验水平上，能否认为这天自动包装机工作正常？

解：根据题意，检验目的是观察产品的平均每袋重量是否与标准重量一致。因此，可建立如下假设：

$$H_0:\ \mu=1\,000,\ H_1:\ \mu\neq 1\,000$$

$$\begin{aligned}\text{检验统计量 } t &=(\bar{x}-\mu_0)/\sigma_{\bar{x}}=(\bar{x}-\mu_0)/(S/\sqrt{n})\\ &=(986-1\,000)/(24/\sqrt{9})=-1.75\end{aligned}$$

由 $\alpha=0.05$，查《t 分布表》(附录 2 表 5)得临界值 $t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(9-1)=2.306$。

由于 $|t|=-1.75<t_{\alpha/2}(n-1)=2.306$，所以接受 H_0，即可认为这天自动包装机工作正常。

t 检验法适用于小样本情况下总体方差未知时对正态总体均值的假设检验。随着样本容量 n 的增大，t 分布趋近于标准正态分布。所以，在大样本情况下($n>30$)，总体方差未知时对正态总体均值 μ 的假设检验通常近似采用 Z 检验法。同理，大样本情况下非正态总体均值的检验也可用 Z 检验法。因为，根据大样本的抽样分布定理，总体分布形式不明或为非正态总体时，样本平均数趋近于正态分布，这时，检验统计量 Z 中的总体标准差 σ 用样本标准差 S 来代替。

8.3.3 关于两个正态总体均值的检验

8.3.3.1 两总体方差已知的场合

设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n1}$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n2}$ 分别独立来自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 与总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的两个样本，其中 σ_1^2、σ_2^2 已知。假设 H_0：$\mu_1=\mu_2$，H_1：$\mu_1\neq\mu_2$。如 H_0 为真，则统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ 服从标准正态分布，可用此统计量来检验上述假设。

例：某厂铸造车间为提高缸体的耐磨性而试制了一种镍合金铸件以取代一种铜合金铸件，现从两种铸件中各抽一个样本进行硬度测试(表示耐磨性的一种考核指标)，其结果如下：

合镍铸件(X)	72.0	69.5	74.0	70.5	71.8	
合铜铸件(Y)	69.8	70.0	72.0	68.5	73.0	70.0

根据以往经验知硬度 $X\sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，且 $\sigma_1=\sigma_2=2$，试在 $\alpha=0.05$ 水平上比较镍合金铸件硬度有无显著提高。

解：要检验的假设为：$H_0:\mu_1=\mu_2$，$H_1:\mu_1>\mu_2$。由于 σ_1 与 σ_2 均已知，所以用 U 检验。

拒绝域为：$U=(\bar{X}-\bar{Y})\Big/\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}>\mu_{1-\alpha}=1.645$，即拒绝域为$\{\mu>1.645\}$。

现由样本求得 $\bar{x}=71.56$，$\bar{y}=70.55$，因此 $U=0.834$，样本未落在拒绝域中，因此在 $\alpha=0.05$水平上认为镍合金铸件的硬度没有明显提高。

8.3.3.2 两总体方差未知，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 的场合

设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n1}$与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n2}$分别独立来自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$与总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$的两个样本，其中 μ_1、μ_2、σ_1^2、σ_2^2 未知，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$。假设 H_0：$\mu_1=\mu_2$，H_1：$\mu_1\neq\mu_2$。如 H_0 属真，则统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S^*\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$服从自由度为 n_1+n_2-2 的 t 分布，可用此统计量来检验上述假设。其中

$$S^*=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

例：杜鹃总是把蛋生在别的鸟巢中，现从两种鸟巢中得到杜鹃蛋 24 个。其中 9 个来自一种鸟巢，15 个来自另一种鸟巢，测得杜鹃蛋的长度(mm)如下：

$n=9$	21.2 21.6 21.9 22.0 22.0 22.2 22.8 22.9 23.2	$\bar{x}=22.20$ $S_1^2=0.4225$
$m=15$	19.8 20.0 20.3 20.8 20.9 20.9 21.0 21.0 21.0 21.2 21.5 22.0 22.0 22.1 22.3	$\bar{y}=21.12$ $S_2^2=0.5689$

试判别两个样本均值的差异是仅由随机因素造成的还是与来自不同的鸟巢有关($\alpha=0.05$)。

解：H_0：$\mu_1=\mu_2$；H_1：$\mu_1\neq\mu_2$

取统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}S_w}\sim T(n+m-2)$

拒绝域为：$|T|\geqslant t_{0.025}(22)=2.074$

$$S_w=\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}=0.718$$

算得统计量值 $T=3.568>2.074$，落在拒绝域内，所以拒绝 H_0，即蛋的长度与不同鸟巢有关。

8.3.3.3 两总体方差未知的一般场合

这里给出两种近似检验方法。

(1) n 与 m 不太大时：

此时 $\bar{X}\sim N(\mu_1, \dfrac{\sigma_1^2}{n})$，$\bar{Y}\sim N(\mu_2, \dfrac{\sigma_2^2}{m})$，且两者独立，从而

$\bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m})$，故

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n}+\frac{{\sigma_2}^2}{m}}}\sim N(0,\ 1)$$

当 ${\sigma_1}^2$ 与 ${\sigma_2}^2$ 分别用其相合估计 ${S_X}^2$ 和 ${S_Y}^2$ 代替后，则

$$t^*=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{{S_X}^2}{n}+\frac{{S_Y}^2}{m}}}$$

近似服从自由度是 L 的 t 分布，其中，$L=\left(\frac{{S_X}^2}{n}+\frac{{S_Y}^2}{m}\right)^2\Big/\left(\frac{{S_X}^4}{n^2(n-1)}+\frac{{S_Y}^4}{m^2(m-1)}\right)$。

(2) 当 n 与 m 较大时：

当 n 与 m 较大时，L 也将随之而增大，我们知道，当 $L\geqslant 30$ 时，自由度为 L 的 t 分布就很接近于正态分布 $N(0,\ 1)$，故在 n 与 m 较大时，我们将上式中的 t^* 改记为 U，并记为 U 近似服从 $N(0,\ 1)$ 分布。

例：设甲、乙两种矿石中含铁量分别服从 $N(\mu_1,\ {\sigma_1}^2)$ 与 $N(\mu_2,\ {\sigma_2}^2)$，现分别从两种矿石中各取若干样品测其含铁量，其样本量、样本均值和样本无偏方差分别为：

甲矿石：$n=10$，$\bar{x}=16.01$，${S_X}^2=10.80$

乙矿石：$m=5$，$\bar{y}=18.98$，${S_Y}^2=0.27$

试在 $\alpha=0.01$ 水平上，检验下述假设：甲矿石含铁量不低于乙矿石的含铁量。

解：这里的检验问题为

$$H_0:\ \mu_1\geqslant\mu_2;\ H_1:\ \mu_1<\mu_2$$

由于这里 n 与 m 都不大，且与又相差很大。故拟采用 t^* 统计量进行检验。此时 $L=9.87$，取整后为 10。在 $\alpha=0.01$ 时，$t_{0.01}(10)=-2.763\,8$，现由样本求得 $t^*=-20\,789$，落入拒绝域，故拒绝 H_0，认为甲矿石含铁量明显高于乙矿石的含铁量。

8.4 总体比率检验和方差检验

8.4.1 总体比率的假设检验

由理论可知样本比率服从二项分布，但在大样本情况下，二项分布近似服从正态分布。因此，对总体比例的检验通常是在大样本条件下进行的，根据正态分布来近似确定临界值，即采用 Z 检验法。其检验步骤与均值检验时的步骤相同，只是检验统计量不同。

例 8-3 研究人员估计 S 市居民家庭的电脑拥有率为 30%。现随机抽查 200 个家庭，其中有 68 个家庭拥有电脑。试问该研究者的估计是否可信？($\alpha=0.1$)。

解：假设 H_0：$P_0=0.3$，H_1：$P\neq 0.3$。

样本比率 $\overline{P}=m/n=68/200=0.34$

由于样本容量大，所以可近似采用 Z 检验法，有

$$Z=\frac{\overline{P}-P_0}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}=\frac{0.34-0.3}{\sqrt{\frac{0.34\times0.66}{200}}}=\frac{0.04}{0.033\,5}=1.194$$

给定 $\alpha=0.1$，查《正态分布分位表》(附录2表5)得 $Z_{\alpha/2}=Z_{0.05}=1.645$。

由于 $|Z|<Z_{\alpha/2}$，接受原假设，即认为该研究者的估计是可信的。

8.4.2 总体方差的假设检验

方差或标准差是衡量变量的离散程度、研究生产活动的均衡性、产品质量的稳定性等最常用的指标，也是正态总体的重要参数之一。所以对总体方差的检验也是常见的一类假设检验问题。若 H_0 为真，则检验统计量服从自由度为 $n-1$ 的 χ^2 分布，即

$$统计量\ \chi^2=(n-1)S^2/\sigma_0^2$$

例 8-5 根据长期正常生产的资料可知，某厂所产维尼纶的纤度服从正态分布，其方差为0.002 5。现从某日产品中随机抽出20根，测得样本方差为0.004 2。试判断该日纤度的波动与平时有无显著差异(取 $\alpha=0.10$)。

解：假设 H_0：$\sigma_0^2=0.002\,5$，H_1：$\sigma_0^2\neq0.002\,5$

$$统计量\ \chi^2=(n-1)S^2/\sigma_0^2=(20-1)0.004\,2/0.002\,5=31.92$$

$\alpha=0.10$，查《χ^2 分布表》(附录2表6)得 $\chi^2_{0.05}(19)=30.14$，故应拒绝 H_0 而接受 H_1，即认为该日纤度的波动性与平时有显著差异(因样本方差大于0.004 2，可认为该日纤度的波动性比平时显著增大)。

8.4.3 关于两个正态总体方差的检验

设 X_1，X_2，…，X_{n1}与 Y_1，Y_2，…，Y_{n2}分别来自总体 $N(\mu_1, \sigma_1{}^2)$与总体 $N(\mu_2, \sigma_2{}^2)$的两个样本，且相互独立。其中 μ_1、μ_2、$\sigma_1{}^2$、$\sigma_2{}^2$ 均未知。假设 H_0：$\sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2$，$H_1$：$\sigma_1{}^2\neq\sigma_2{}^2$。如果 H_0 为真，则统计量 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$服从自由度为 n_1-1、n_2-1 的 F 分布，可用此统计量来检验上述假设。

例：甲、乙两台机床加工同一轴。从两台机床加工的轴分别随机抽取若干根，测得直径为：(单位：毫米)

机床甲	20.5，19.8，19.7，20.4，20.1，20.0，19.0，19.9
机床乙	20.7，19.8，19.5，20.8，20.4，19.6，20.2

假定各机床加工轴的直径分别构成正态总体。试比较甲、乙两台机床加工的精度有无显著差异($\alpha=0.05$)。

解：首先建立假设：

$$H_0:\ \sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2,\ H_1:\ \sigma_1{}^2\neq\sigma_2{}^2$$

在 $n=8$，$m=7$，$\alpha=0.05$ 时，$F_{0.025}(7, 6)=0.195$，$F_{0.975}(7, 6)=5.70$

故拒绝域为 $\{F\leqslant0.195$ 或 $F\geqslant5.70\}$

现由样本求得 $S_X{}^2=0.216\,4$，$S_Y{}^2=0.272\,9$，从而 $F=0.793$，未落入拒绝域，因而在 $\alpha=0.05$水平上可以认为两台机床加工精度一致。

8.5 区间估计与假设检验的关系

8.5.1 区间估计与假设检验的关系

抽样估计和假设检验都是统计推断的重要内容。如果总体分布形式已知，只是总体参数未知，则统计推断问题就归结为推断总体参数的问题。抽样估计或称参数估计是根据样本资料估计总体参数的真值，而假设检验是根据样本资料来检验对总体参数的先验假设是否成立。例如，通过随机抽取的样本对某地区居民的平均收入进行推断，如果要求以一定的概率估计总体平均收入，这就是一个参数估计问题，更准确地说，这是一个区间估计问题；如果要求以一定的概率判断总体平均收入是否达到了某一水平或是否有显著提高，这就是一个假设检验问题。

区间估计通常求得的是以样本估计值为中心的双侧置信区间，而假设检验不仅有双侧检验也常常采用单侧检验，视检验的具体问题而定。

区间估计立足于大概率，通常以较大的把握程度(可信度)$1-\alpha$ 去估计总体参数的置信区间。而假设检验立足于小概率，通常是给定很小的显著性水平 α 去检验对总体参数的先验假设是否成立。在假设检验中，人们更重视拒绝区域。这是因为我们只依据一个样本来进行推断，用一个实例去证明某个命题是正确的，这在逻辑上是不充分的；但用一个反例去推翻一个命题，理由是充足的，因为一个命题成立时不允许有反例存在。所以，假设检验运用的是概率意义上的反证法，在建立假设时本着“不轻易拒绝原假设”的原则。一旦检验结论为拒绝原假设，就会有较大的把握程度(即错误判断的可能性很小)；而当不能否定原假设时，只能将它作为真的保留下来，但事实上它有可能不真，所以，接受它有可能是个错误。

区间估计和假设检验虽各有其特点，但也有着紧密的联系。两者都是根据样本信息对总体参数进行推断，都是以抽样分布为理论依据，都是建立在概率基础上的推断，推断结果都有一定的可信程度或风险；对同一实际问题的参数进行推断，使用同一样本、同一统计量、同一分布。因而，两者可以相互转换，即区间估计问题可以转换成假设检验问题，假设检验问题也可以转换成区间估计问题。这种相互转换形成了区间估计与假设检验的对偶性。

以总体均值 μ 的区间估计和假设检验为例，当总体方差 σ^2 已知时，$\sigma_{\bar{x}}=\sigma/\sqrt{n}$，由于统计量

$$Z=|x-\mu_0|/\sigma_{\bar{x}}=|x-\mu_0|/(\sigma/\sqrt{n})\sim N(0,\ 1)$$

给定置信度 $1-\alpha$ 时，有

$$P(|Z|\leqslant Z_{\alpha/2})=1-\alpha$$

反之

$$P(|Z|>Z_{\alpha/2})=\alpha$$

当总体均值 μ 可知时，可估计的 μ 置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为：

$$-Z_{\alpha/2}\leqslant(\mu-x)/\sigma_{\bar{x}}\leqslant Z_{\alpha/2}$$

上式等价于 Z 检验的接受区域：$|Z|\leqslant Z_{\alpha/2}$

若事先假设：$\mu=\mu_0$，可求出统计量 Z 的具体值。当 $Z\leqslant Z_{\alpha/2}$时，不属于小概率事件，

应接受原假设；反之，当$|Z|>Z_{\alpha/2}$时，小概率事件发生了，按假设检验的规则，应拒绝原假设。可见，区间估计中的置信区间对应于假设检验中的接受区域，置信区间之外的区域就是拒绝区域。对比率、方差等问题的区间估计和假设检验也同样存在这种对偶性。

8.5.2 假设检验中的 P 值

假设检验的结论是在给定的显著性水平下作出的。因此，在不同的显著性水平下，对同一检验问题所下的结论可能完全相反。例如，在显著性水平 $\alpha=0.10$ 时应拒绝原假设，但有可能在显著性水平 $\alpha=0.05$ 时应接受原假设。因为降低显著性水平 $\alpha<0.05$ 时会导致拒绝区域缩小，从而就有可能使原来落在 $\alpha=0.10$ 的拒绝区域的统计量的值变成落在 $\alpha=0.05$ 的接受区域内。

给定显著性水平，对于相同的样本容量和分布，临界值是固定的，拒绝区域也就固定了。但不同样本得出的检验统计量的值不同，即使都落在相同的区域，所下的结论相同，但检验的把握程度实际上是不同的。因为检验统计量的值 Z 无论是等于 5 还是等于 3，都大于临界值 $Z_{0.01/2}=2.58$，它们所得检验结论也都是拒绝原假设。但很显然，两者的把握程度是有差异的，前者拒绝原假设的理由更为充足，更有把握。

计算 P 值就是把假设检验中的把握程度问题考虑进来，即换一个角度来进行假设检验。

在总体均值的检验中，对于检验统计量 $Z=2.4$，由 Z 服从正态分布 $N(0,\ 1)$可求得统计量 Z 大于 2.4 的概率：

$$P(Z\geqslant 2.4)=0.008\,198$$

在这里，若选定的显著性水平 $\alpha>0.008\,2$ 时，统计量的值 $Z=2.4$ 必然大于临界值 Z_α，即统计量的值落在拒绝区域内；若选定的显著性水平 $\alpha<0.008\,2$ 时，必有 $Z=2.4<Z_\alpha$，即统计量的值落在接受区域内。可见，在本例中，若要拒绝原假设，显著性水平的最小值为 0.0082，比它稍大一点就会导致接受原假设。通常把这种“拒绝原假设的最小显著性水平”称为假设检验的 P 值。

【本章小结】

假设检验是统计推断的重要内容。它是用样本信息对总体参数进行的一种判断，这种判断是基于小概率原理进行的。对小概率原理的应用涉及两类错误问题。假设检验与区间估计有联系也有区别。

练习 8

1 假设检验的基本思想是什么？假设检验一般有哪些步骤？

2 区间估计与假设检验有何联系与区别？如何根据置信区间进行假设检验？

3 一种电子元件，要求其使用寿命不得低于 1 000 小时。已知这种元件的使用寿命服从标准差为 100 小时的正态分布。现从一批元件中随机抽取 25 件，测得平均使用寿命为 958 小时。试在 0.02 的显著性水平下，确定这批元件是否合格。

4什么是原假设？什么叫备择假设？

5正态分布和 t 分布有什么不同，在平均数和成数检验中什么场合使用 t 分布？

6假设某产品的重量服从正态分布，现在从一批产品中随机抽取 16 件，测得平均重量为 820 克，标准差为 60 克，试以显著性水平 $\alpha=0.01$ 检验原假设 $\bar{X}=800$ 克。

7某市全部职工中，平常订阅某种报纸的占 40%，最近从订阅率来看似乎出现减少的现象，随机抽 200 户职工家庭进行调查，有 76 户职工订阅该报纸，问报纸的订阅率是否显著降低（$\alpha=0.05$）？

8某型号的汽车轮胎耐用里程服从正态分布，其平均耐用里程为 25 000 公里。现在从某厂生产的轮胎随机取 10 个进行里程测试，结果数据如下：

25 400　25 600　25 300　24 900　25 500

24 800　25 000　248 000　25 200　25 700

根据以上数据检验该厂轮胎的耐用里程是否存在显著性的差异（$\alpha=0.05$）？

9加工某零件的标准口径服从标准差为 0.03 毫米的正态分布。现在从生产的零件中随机取 6 件，实测口径（毫米）如下：

20.05　20.12　20.15　20.07　20.1　20.11

根据样本资料，试以显著性水平 $\alpha=0.04$ 检验总体口径方差是否存在显著性差异。

10在下列练习中，给出显著性水平和试验结果相应的概率值，陈述你将作出何种决策（拒绝或接受 H_0）：

(1) $\alpha=0.05$，$P=0.65$　　(2) $\alpha=0.01$，$P=0.009$

(3) $\alpha=0.01$，$P=0.025$　　(4) $\alpha=0.05$，$P=0.025$

(5) $\alpha=0.01$，$P=0.10$　　(6) $\alpha=0.05$，$P=0.49$

11在下列练习中，给出 H_0，α，P 的观察值以及 H_0 的实际情况，请陈述错误的类型：

(1) H_0：$P=Q=0.5$，$\alpha=0.01$ 单侧检验，$P=0.008$（单侧），H_0 为真；

(2) H_0：$P=Q=0.5$，$\alpha=0.05$ 双侧检验，$P=0.08$（双侧），H_0 为真；

(3) H_0：$P=Q=0.5$，$\alpha=0.05$ 双侧检验，$P=0.06$（双侧），H_0 不真；

(4) H_0：$P=Q=0.5$，$\alpha=0.05$ 双侧检验，$P=0.03$（双侧），H_0 不真；

(4) H_0：$P=Q=0.5$，$\alpha=0.01$ 双侧检验，$P=0.005$（双侧），H_0 不真。

12为比较两个电影制片公司生产的每部影片放映时间的长短，现随机抽若干部影片，记录其刻映时间如下：

设甲厂放映时间服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$，现抽 5 部影片，其放映时间分别为：102，86，98，109，92（分钟）；

设乙厂放映时间服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$，现抽 7 部影片，其放映时间分别为：81，105，97，124，92，87，114（分钟）。

试问在 $\alpha=0.01$ 水平上两者的方差是否一致？两者的均值是否一致？

13假定 A、B 两种小麦的蛋白质含量分别服从 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$。为比较其蛋白质含量，现从 A 种小麦中随机抽取 10 个样品，得样本均值 $\bar{x}=14.3$，样本方差 $S_1^2=1.621$；从 B 种小麦中随机抽取 5 个样品，得样品均值 $\bar{y}=11.7$，样本方差 $S_2^2=0.135$。试在 $\alpha=0.05$ 水平上检验两者方差是否一致？两者均值是否一致？

9 方差分析

学习目标 本章要求掌握方差分析的原理和方法。

9.1 方差分析的内容和思想

9.1.1 方差分析的内容

方差分析能够解决多个均值是否相等的检验问题。例如，KN 市场调研公司在研究如何评价儿童干谷类食品的潜在的新品种时，认为能改善食品味道的四种关键因素为：

A. 食品中小麦与玉米的比例。

B. 甜味剂的类型：白糖、蜂蜜或人工制剂。

C. 果味香料的有无。

D. 加工时间的长短。

一个用于确定这四种因素对食品味道的影响的试验被设计出来。例如，一种被检验的食品是在某个特定的小麦与玉米的比例、甜味剂为白糖、加果味香精，以及短加工时间条件下制成；另一种被检验的食品在小麦与玉米比例不同但其他三种因素相同条件下制成。由几组儿童品尝这些食品并说出他们对每种食品的评价。

用于研究由品尝得来的数据的统计方法是方差分析。分析结果表明：

- 食品成分及甜味剂类型对味道影响很大。
- 果味香精事实上破坏了食品的味道。
- 加工时间对味道没有影响。

这些信息帮助 KN 公司的研究者们识别出了可能产生最佳口味食品的因素。

KN 公司使用的试验设计及随后的方差分析在推荐生产方案中起了很大作用。

方差分析所进行的检验是对多个均值是否相等问题的检验。节省时间是这种方法明显的优点。它的另一个好处是，由于进行分析时是将所有的样本资料结合在一起，因而增加了稳定性。例如，有 30 个样本，每一个样本包括 10 个观察单位。如果用 t 检验法，一次只能研究两个样本，20 个观察单位，而使用方差分析则可以把 300 个观察单位结合在一起进行研究。所以说，方差分析是一种实用、有效的分析方法。

方差分析是对多个总体均值是否相等这一假设进行的检验。下面通过一个例子说明方差分析的内容。

例 9－1 某汽车公司设计了四种不同的营销方案。这四种方案的不同点集中表现在电话交易的频数上。为了比较研究这四种方案的营销效果，随机从五家分销商收集了前一期该种汽车交易的电话记录，如表 9－1 所示。

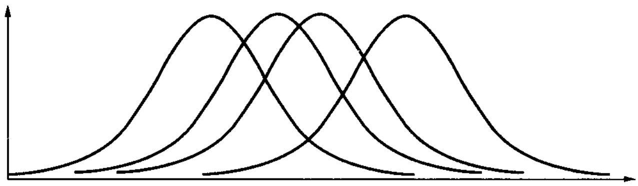
表 9－1　五家分销商的电话交易频数情况表

销售商	A方案	B方案	C方案	D方案
1	26.5	31.2	27.9	30.8
2	28.7	28.3	25.1	29.6
3	25.1	30.8	28.5	32.4
4	29.1	27.9	24.2	31.7
5	27.2	29.6	26.5	32.8

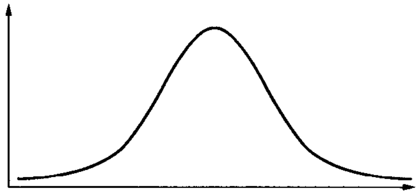
问不同的方案是否对汽车销售量产生影响。

这是一个方差分析问题，即对四种方案下的电话交易频数的均值是否相等进行检验。

由于汽车是同一厂家生产的，它们的质量、外形设计、价格、内装修等可能影响销售量的因素全部相同，如果检验结果为 μ_1，μ_2，μ_3，μ_4 不相等，如图 9－1(a)所示，则意味着它们来自于不同的总体，表明某种营销方案对汽车销售量产生影响。反之，如果检验结果为 μ_1，μ_2，μ_3，μ_4 不存在显著影响，则可以认为任何方案对销售量都没有影响，它们来自于相同的总体。见图 9－1(b)。



(a)不同总体的情况



(b)相同总体的情况

图 9－1　两种检验结果

在方差分析中，因素是一个独立的变量，也是方差分析研究的对象。在本例中，营销方案就是一个因素。因素中的内容称为水平。本例中的因素包含四个水平，即有 A、B、C、D 等四种不同的方案。如果方差分析只针对一个因素进行，称为单因素方差分析；如果同时针对多个因素进行，称为多因素分析。在多因素方差分析中，双因素方差分析是最常见的。

在方差分析中，通常假定各个水平的观察数据是来自于服从正态分布总体中的随机样本，各个总体相互独立，且方差相同。而实际应用中无法严格地满足这些假定，一般只要求

近似地符合上述假定。

9.1.2 方差分析的原理

从方差分析的目的看，是要检验各个水平的均值 μ_1，μ_2，μ_3，μ_4 是否相等，而实现这个目的的手段是通过方差的比较。观察值之间存在着差异，差异的产生来自于两个方面：一个方面是由因素中的不同水平造成的，例如，不同方案带来不同的销售量，对此我们可以称为系统性差异；另一个方面是由于抽选样本的随机性而产生的差异，例如，相同的方案在不同的分销市场的销售量也不同，可称为随机性误差。两个方面产生的差异可以用两个方差来计量，一个称为水平之间的方差，一个称为水平内部的方差。前者即包括系统性因素，也包括随机性因素，后者仅包括随机性因素。如果不同的水平(方案 A、B、C、D)对结果(销售量)没有影响，那么在水平之间的方差中，就仅仅有随机因素的差异，而没有系统性差异，它与水平内部方差就应该近似，两个方差的比值就会接近于 1。反之，如果不同的水平对结果产生影响，在水平之间的方差中就不仅包括了随机性差异，也包括了系统性差异。这时，该方差就会大于水平内方差，两个方差的比值就会显著地大于 1，当这个比值大到某个程度，或者说达到某临界点，就可以作出判断，说不同的水平之间存在着显著性差异。因此，方差分析就是通过不同方差的比较，作出接受原假设或拒绝原假设的判断。

小概率原理仍然是方差分析的指导思想。方差分析的步骤包括建立假设、计算 F 统计量、给定置信水平、查表确定临界值、比较判断等。

9.2 单因素方差分析

9.2.1 单因素方差分析的步骤

例中，不同水平(方案 A、B、C、D)下销售量 x 的概率分布服从正态分布，并且有相同方差。因此，水平的差异必然体现在水平均值的差异上。于是，作为单因素的方差分析，其目标是检验水平均值 μ_j 是否相等。如果相等，我们说该因素(方案)对 x 不产生影响；反之，就认为该因素对 x 存在影响。

为便于叙述，也便于理解，可以按方差分析的逻辑讲解如下：

(1) 首先对各组的水平状况进行了解，并计算它们的均值。

不妨令 $\overline{x_j}$ 表示第 j 种水平的样本均值，有

$$\overline{x_j}=\sum x_{ij}/n_j$$

式中，x_{ij}是第 j 种水平下的第 i 个观察值，n_j 表示第 j 种水平的观察值个数。

数据列表及计算如表 9－2 所示。

表 9－2　四种方案电话交易频数及均值

观察值	水平				
	A	B	C	D	
1	26.5	31.2	27.9	30.8	
2	28.7	28.3	25.1	29.6	
3	25.1	30.8	28.5	32.4	
4	29.1	27.9	24.2	31.7	
5	27.2	29.6	26.5	32.8	
合计	136.6	147.8	132.2	157.3	573.9
水平均值	$\bar{x}_1=27.32$	$\bar{x}_2=9.56$	$\bar{x}_3=26.44$	$\bar{x}_4=31.46$	
观察值个数	n_1	n_2	n_3	n_4	
总均值	$\bar{\bar{x}}=\sum\sum x_{ij}/n=573.9/20=28.695$				
组间方差	SMA＝25.615 2				
组内方差	SME＝2.442 8				

（2）采用 F 检验进行判断。

我们要对 4 个均值 μ_1、μ_2、μ_3、μ_4 是否相等进行 F 检验。由于检验的内容是营销方案对销售量影响问题，所以对所关心的问题提出如下原假设和替换假设：

H_0：μ_1、μ_2、μ_3、μ_4 相等　方案对销售量没有影响

H_1：μ_1、μ_2、μ_3、μ_4 不全相等　方案对销售量有影响

若 $\alpha=0.05$，查《F 分布表》(附录 2 表 7)知：

$$F_\alpha(r-1,\ n-r)=F_{0.05}(3,\ 16)=3.24$$

括号中 $r-1$，$n-r$ 分别为分子项 n_1 和分母项 n_2 的自由度。

由前面资料可以计算出的 F 值为

$$F=\text{组间方差}/\text{组内方差}=\text{SMA}/\text{SME}=25.615\ 2/2.442\ 8=10.486$$

由于 $F>F_\alpha$，故拒绝原假设，接受替换假设。即通过检验知，μ_1、μ_2、μ_3、μ_4 不全相等，说明营销方案对销售量有显著影响，见图 9－2。

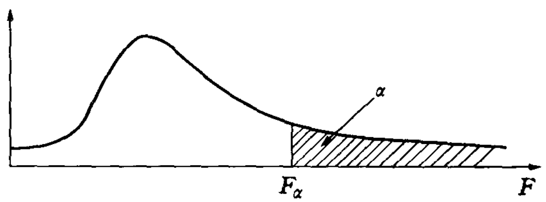


图 9－2　F 检验示意图

9.2.2　F 分布与 F 值的计算

水平间(也称组间)方差和水平内(也称组内)方差之比是一个统计量。

数理统计证明，这个统计量服从 F 分布，有

$$F = 组间方差/组内方差$$

F 分布有这样几个特征：

（1）统计量 F 是大于零的正数。

（2）F 分布曲线为正偏态，它的尾端以横轴为渐近线趋于无穷。

（3）F 分布是一种连续的概率分布，不同的自由度组合有不同的 F 分布曲线，如图 9－2 所示。

由图 9－2 看出，随着分子和分母自由度的增加，F 分布以对称的正态分布为极限。许多类型的假设检验需要利用 F 分布，方差分析是其中重要的一种。

关于组间方差(SMA)和组内方差(SME)的计算方法说明如下。

在单因素方差分析中，离差平方和有三个，它们分别是总离差平方和(SST)、误差项离差平方和(SSE)以及水平项离差平方和(SSA)。其中：

组内方差＝误差项离差平方和/误差项自由度＝SSE/$(n-r)$

组间方差＝水平项离差平方和/水平项自由度＝SSA/$(r-1)$

总离差平方和(SST)反映了离差平方和的总体情况。如本例有

$$\mathrm{SST} = \sum\sum(x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 = \sum\sum(x_{ij} - 28.695)^2$$

$$\mathrm{SST} = (26.5 - 28.695)^2 + (28.7 - 28.695)^2 + \cdots + (32.8 - 28.695)^2 = 115.929\,5$$

误差项离差平方和(SSE)反映的是水平内部，或组内观察值的离散状况。如本例有

$$\begin{aligned}\mathrm{SSE} &= \sum(x_{ij} - 27.32)^2 + \sum(x_{ij} - 29.56)^2 + \sum(x_{ij} - 26.44)^2 + \sum(x_{ij} - 31.46)^2 \\ &= 10.688 + 8.572 + 13.192 + 6.632 = 39.084\end{aligned}$$

对公式分析不难发现，SSE 实质上反映了随机因素带来的影响。

水平项离差平方和(SSA)反映的是组间差异。如本例有

$$\mathrm{SSA} = \mathrm{SST} - \mathrm{SSE} = 115.929\,5 - 39.084 = 76.845\,5$$

因为

$$\begin{aligned}\sum\sum(x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 &= \sum\sum[(x_{ij} - \bar{x}_j) + (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})]^2 \\ &= \sum\sum(x_{ij} - \bar{x}_j)^2 + \sum\sum(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 + 2\sum\sum(x_{ij} - \bar{x}_j)(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})\end{aligned}$$

在各组同为正态分布，等方差条件下，等式右边最后一项为零，故有

$$\sum\sum(x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 = \sum\sum(x_{ij} - \bar{x}_j)^2 + \sum\sum(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$$

即

$$\mathrm{SST} = \mathrm{SSE} + \mathrm{SSA} \text{ 或 } \mathrm{SSA} = \mathrm{SST} - \mathrm{SSE}$$

关键是如何确定各离差平方的自由度。

对总离差平方和(SST)来说，它是 n 个离差平方 $(x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2$ 之和，共同拥有一个平均数，也就失去了一个自由度，其自由度应为 $n-1$。它只有一个约束条件，即

$$\mathrm{SST} = \sum\sum(x_{ij} - \bar{\bar{x}}) = 0$$

对水平离差平方和(SSA)来说，本例是 4 组水平（即四种不同方案）离差平方 $(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$ 之和，共同拥有一个平均数，也失去 1 个自由度，其自由度为 $4-1$。用 r 表示组数，则有 $r=4$。$4-1=r-1$。它也有一个约束条件，即要求

$$\sum\sum(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}) = 0$$

对误差项平方和(SSE)来说，因为对各组(每一种水平)而言，其组内观察值个数为 n_j，它们都失去一个自由度，该组(水平)下的自由度为 $n_j - 1$，总共有 r 个组(水平)，因此拥有的自由度个数为 $r(n_j - 1) = n - r$。

其实，与离差平方和一样，SST = SSA + SSE 之间的自由度也存在如下关系：

总离差自由度 = 误差项自由度 + 水平项自由度

$$(n-1) = (r-1) + (n-r)$$

于是，对本例有

组内方差 = SME = SSE/$(n-r)$ = 39.084 0/(20 − 4) = 2.442 8

组间方差 = SMA = SSA/$(r-1)$ = 76.845 5/(4 − 1) = 25.615 2

为了将方差分析的主要过程表现得更清楚，通常把有关计算结果列成方差分析表，如表 9 − 3 所示。

表 9 − 3　方差分析表

方差来源	离差平方和	自由度	平均平方	F 值
组间	SSA	$r-1$	MSA	SMA/SME
组内	SSE	$n-r$	MSE	
总方差	SST	$n-1$		

使用 Excel 软件进行方差分析，其输出结果的构造与表 9 − 3 类似，见表 9 − 4。

表 9 − 4　Excel 软件输出的方差分析

差异源	SS	df	MS	F	P − value	Fcrit
组间	76.845 5	3	25.615 17	10.486 2	0.000 466	3.238 87
组内	39.084	16	2.442 75			
总计	115.929 5	19				

注：差异源即方差来源；SS 即离差平方和；df 为自由度；MS 即平均平方；F 即 F 值；P − value 即 P 值；Fcrit 即 F_α 临界值。

表 9 − 4 中，P 值表明，F 值超过临界点 F_α 右侧的面积仅有 0.046 60%。

9.2.3　样本容量不等下的方差分析

进行方差分析时，各个水平下的样本容量可以相同，也可以不同。

进行方差分析时，可以把方差分析的因素放在列的位置，也可以放在行的位置，但通常放在列的位置。这样与计算机中数据库的结构相一致，便于计算机处理。

例 9 − 2　某课程结束后，学生对该授课教师的教学质量进行评估，评估结果分为优、良、中、差四等。教师对学生考试成绩的评判和学生对教师的评估是分开进行的，他们互相都不知道对方给自己的打分。有一种说法，认为给教师评为优秀的这组学生的考试分数，可

能会显著地高于那些认为教师工作仅是良、中或差的学生的分数。同时认为，对教师工作评价差的学生，其考试的平均分数可能最低。为对这种说法进行检验，从对评估的每一个等级组中，随机抽取出共 26 名学生。其课程分数如表 9－5 所示。

表 9－5 26 名学生考试成绩

观察值	学生对教师评估等级			
i	优	良	中	差
1	85	80	73	76
2	77	78	80	72
3	79	94	92	70
4	84	73	76	85
5	92	79	6	
6	90	86		
7	73	91		
8	75			
9	81			
10	64			

试检验各组学生的分数是否有显著差别($\alpha=0.05$)。

解：若各组学生的平均成绩之间没有显著差别，则表明学生对教师的评估结果与他们的成绩之间没有必然的联系。

H_0：各组平均分数相等；

H_1：各组平均分数不全相等。

利用 Excel 软件，将计算结果列表 9－6。

表 9－6 学生平均成绩方差分析表

差异源	SS	df	MS	F	P－value	Fcrit
组间	151.808 2	3	50.602 75	0.774 546	0.506 55	3.049 124
组内	1 437.307	22	65.332	14		
总计	1 589.115	25				

由于 F＜Fcrit，故接受原假设，可以认为学生的成绩与它们对教师教学质量的评估意见之间没有关系。

方差分析可以对若干平均值是否相等同时进行检验，这是此种方法的特点和长处。但如果检验结果拒绝原假设，接受替换假设，这仅表明进行检验的这几个均值不全相等。至于是哪一个或哪几个均值与其他均值不等，方差分析并没有告诉答案。如果要对此问题进一步分析，可采用其他书上介绍的多重比较方法。

9.3 双因素方差分析

汽车销售量除了受到营销方案的影响之外，我们还想了解汽车的颜色是否影响销售量，如果不同的颜色对销售量存在显著的影响，就需要分析原因，采用不同对策。若把营销方案看做影响销售量的因素 A，汽车颜色则是影响因素 B。对因素 A 和因素 B 同时进行分析，就属于双因素方差分析。双因素方差分析的内容，是对影响因素进行检验，究竟一个因素在起作用，还是两个因素都起作用，或是两个因素的影响都不显著。

双因素方差分析有两种类型；无交互作用的双因素方差分析和有交互作用的双因素方差分析。这里介绍无交互作用的双因素方差分析。

首先给出双因素方差分析表(表 9－7)。

表 9－7 双因素方差分析表

误差来源	离差平方和	自由度	均方差	F 值
A 因素	SSA	$r-1$	SMA = SSA/($r-1$)	FA = SMA/SME
B 因素	SSB	$k-1$	SMB = SSB/($k-1$)	FB = SMB/SME
误差	SSE	$(r-1)(k-1)$	SME = SSE/$(r-1)(k-1)$	
合计	SST	$n-1$		

例 9－3 某商品有五种不同的包装方式(因素 A)，在五个不同地区(因素 B)销售，现从每个地区随机抽取一个规模相同的超级市场，得到该商品不同包装的销售资料如表 9－8 所示。

表 9－8 某种商品不同地区不同包装的销售资料

销售地区(B)	包装方式(A) A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
B_1	20	12	20	10	14
B_2	22	10	20	12	6
B_3	24	14	18	18	10
B_4	16	4	8	6	18
B_5	26	22	16	20	10

现欲检验包装方式和销售地区对该商品销售是否有显著性影响($\alpha=0.05$)。

解：若五种包装方式的销售量的均值相等，则表明不同的包装方式在销售上没有差别；同理，若五个地区的销售的均值相等，则表明不同地区在销售上没有影响。故方差分析的过程为：

第一步：建立假设：

对因素 A：

H_0：包装方式之间无差别

H_1：不全相等　　　包装方式之间有差别

对因素 B：

H_0：地区之间无差别

H_1：不全相等　　　地区之间有差异

第二步：计算 F 值：

因素 A 的列均值分别为：

$\bar{x}_{A_1}=21.6$，$\bar{x}_{A_2}=12.4$，$\bar{x}_{A_3}=16.4$，$\bar{x}_{A_4}=13.2$，$\bar{x}_{A_5}=11.6$

因素 B 的行均值分别为：

$\bar{x}_{B_1}=15.2$，$\bar{x}_{B_2}=14$，$\bar{x}_{B_3}=16.8$，$\bar{x}_{B_4}=10.4$，$\bar{x}_{B_5}=18.8$

总均值 $\bar{\bar{x}}=15.04$。

离差平方和的计算如下：

$SST=(20-15.04)^2+\cdots+(10-15.04)^2=880.96$

$SSA=5(21.6-15.04)^2+\cdots+5(11.6-15.04)^2=335.36$

$SSB=5(15.2-15.04)^2+\cdots+5(18.8-15.04)^2=199.36$

$SSE=880.96-335.36-199.36=346.24$

接下来计算均方差：

$SMA=335.36/(5-1)=83.84$

$SMB=199.36/(5-1)=49.84$

$SME=346.24/[(5-1)(5-1)]=21.46$

因此，两因素统计量 F 值计算如下：

$F_A=SMA/SME=83.84/21.64=3.887\ 430\ 7$

$F_B=SMB/SME=49.84/21.64=2.303\ 142$

若使用计算机，Excel 的输出结果如下(表 9－9)：

表 9－9　双因素方差分析表

差异源	SS	df	MS	F	P－value	Fcrit
行(因素 B)	199.36	4	49.84	2.303 142	0.103 195	3.006 917
列(因素 A)	335.36	4	83.84	3.887 430 7	0.021 886	3.006 917
误差	346.24	16	21.64			
总计	880.96	24				

第三步：统计决策。

由表 9－9 知，因为：

对于因素 A：

$$F_A=3.870\ 430\ 7>Fcrit=3.006\ 917$$

故拒绝 H_0，接受 H_1，说明不同的包装方式对该商品的销售产生不同的影响。

对于因素 B，因为：

$$F_B = 2.303\,142 < Fcrit = 3.000\,917$$

故接受 H_0，说明不同地区之间在该商品的销售上没有显著的差异。

【本章小结】

方差分析是可以对多个参数进行检验的方法，因而是比假设检验更加实用和有效的分析方法。

练习 9

1 方差分析的基本原理是什么?

2 说明单因素方差分析中 SST，SSE，SSA 的含义及三者之间的关系。

3 根据方差分析表说明方差分析的步骤。

4 某商店采用四种不同的方式推销商品，为检验不同方式推销商品的效果是否有显著差异。随机抽取样本，得到如下数据：

方式一	方式二	方式三	方式四
77	95	72	80
86	92	77	84
80	82	68	79
88	91	82	70
84	89	75	82

计算 F 统计量，并以 $\alpha = 0.05$ 的显著性水平作出统计决策。

5 某商店经理给出了评价职工的业绩指标，按此将商店职工的业绩分为优、良、中等三类，为增加客观性，经理又设计了若干项测验。现从优、良、中等三类职工中各随机抽 5 人，下表列出了他们各项测验的总分：

	优	良	中等
1	104	68	41
2	87	69	37
3	86	71	44
4	83	65	47
5	86	66	33

（1）假定各类人员的成绩分布都服从正态分布，且假定方差相同，试问三类人员的测验

平均分有无显著差异？（$\alpha=0.05$）

（2）在上述假定下，给出优等职工测验平均分的置信水平为0.95的置信区间。

6 某粮食加工厂试验三种贮藏方法，对粮食含水率有无显著影响。现取一批粮食分成若干份，分别用三种不同的方法贮藏，过一段时间后测得的含水率如下表：

贮藏方法	含水率数据				
A_1	7.3	8.3	7.6	8.4	8.3
A_2	5.4	7.4	7.1		
A_3	7.9	9.5	10.0		

（1）假定各种方法贮藏的粮食的含水率服从正态分布，且方差相等，试在 $\alpha=0.05$ 水平上检验这三种方法对含水率有无显著影响；

（2）对每种方法下的平均含水率给出置信水平为的0.95置信区间。

7 为测定一大型化工厂对周围环境的污染，选了四个观测点 A_1，A_2，A_3，A_4，在每一观测点上各测定四次空气中二氧化硫的含量。现得各观测点上的平均含量 $\bar{y}_i$ 及样本标准差 s_i 如下：

观测点	A_1	A_2	A_3	A_4
$\bar{y}_i$	0.031	0.1	0.079	0.058
s_i	0.009	0.014	0.01	0.011

假定每一观测点上二氧化硫的含量服从正态分布，且方差相同，试问在 $\alpha=0.05$ 水平上各观测点二氧化硫的平均含量有无显著差异？

10 回归分析

学习目标 本章要掌握回归方程的估计方法、回归参数的检验方法和回归预测方法。重点掌握最小平方估计方法和线性回归方程的估计和评价。

10.1 回归分析方法

10.1.1 回归分析

两现象之间存在相关关系时，可以建立一个回归方程来研究两者之间的数量依存关系。例如，宝丽来公司在生产胶卷中重视对即时显像技术和成像系统的研究，其中一项研究任务是了解胶卷保存时间长短对感光速率的影响问题。在宝丽来中心感光实验室中，科学家们把即时显像胶片置于一定的温度和湿度下使之近似于消费者购买后的保存条件，然后再对其进行系统地抽样检验和分析。他们选择专业彩色摄影胶卷，抽取了分别已保存 1 个月至 13 个月不等的胶卷，以便研究它们保存时间和感光速率之间的联系。数据显示，感光速率随保存时间的延长而下降。它们之间相应变动的关系可用一条回归直线或线性回归关系近似表示，即

$$Y = -19.8 - 7.6X$$

式中：Y——胶卷感光率的变动；X——胶卷保存时间(月)。

从这一方程式可以看出，胶卷的感光速率平均每月下降 7.6 个单位。通过此分析得到的信息，有助于宝丽来公司把消费者的购买和使用结合起来考虑，调整生产，提供顾客需要的胶卷。

10.1.2 相关关系、函数关系与回归分析

客观现象的相关关系可以按不同的标志加以区分：

(1) 按相关的程度可分为完全相关、不完全相关和不相关。完全相关是函数关系，是相关关系的一个特例，一般的相关现象都是不完全相关。

(2) 按相关的方向可分为正相关和负相关。

(3) 按相关的形式可分为线性相关和非线性相关。如果两种相关现象之间并不表现为直线的关系，而是近似于某种曲线方程的关系，则这种相关关系称为非线性相关。

(4) 按所研究的变量多少可分为单相关、复相关和偏相关。两个现象的相关，即一个变量对另一个变量的相关关系，称为单相关。当所研究的是一个变量对两个或两个以上其他变量的相关关系时，称为复相关。例如，某种商品的需求与其价格水平以及人们收入水平之间的相关关系便是一种复相关。在某一现象与多种现象相关的场合，当假定其他变量不变时，其中两个变量的相关关系称为偏相关。例如，在假定人们的收入水平不变的条件下，某种商

品的需求与其价格水平的关系就是一种偏相关。

从现象之间的数量关系的相关程度上看，可以分为函数关系和相关关系。圆的面积与圆的半径之间存在着函数关系。这不是统计学研究的对象，因为函数关系是指当一个或几个变量取一定的值时，另一个变量有确定值与之相对应的数量关系。而统计学所研究的现象之间的关系是一种不确定性关系。当一个或几个相互联系的变量取一定数值时，与之相对应的另一变量的值虽然不确定，但它仍按某种规律在一定的范围内变化，变量间的这种相互关系称为具有不确定性的相关关系。例如，胶卷感光速率和保存时间的关系，生产规模与单位产品成本之间的关系等，都属于相关关系。但是，变量之间的函数关系和相关关系在一定条件下是可以互相转化的。相关关系经常可以用一定的函数形式去近似地描述，从而运用回归分析法建立起具有两个变量的方程式，如建立以胶卷感光速率和保存时间为变量的方程式。

相关分析和回归分析是研究客观现象之间数量联系的重要统计方法，既可以从描述统计的角度，也可以从推断统计的角度来说明。所谓相关分析，就是用一个指标来表明现象间相互依存关系的密切程度。所谓回归分析，就是根据相关关系的具体形态，选择一个合适的数学模型，来近似地表达变量间的平均变化关系。它们具有共同的研究对象，在具体应用时，相关分析需要依靠回归分析来表明现象数量相关的具体形式，而回归分析则需要依靠相关分析来表明现象数量变化的相关程度。只有当变量之间存在着高度相关时，进行回归分析寻求其相关的具体形式才有意义。由于相关分析不能指出变量间相互关系的具体形式，所以回归分析要对具有相关关系的变量之间的数量联系进行测定，从而为估算和预测提供了一个重要的方法。在有关管理问题的定量分析中，推断统计更加具有广泛的应用价值。

需要指出的是，相关分析和回归分析只是定量分析的手段。通过相关与回归分析，虽然可以从数量上反映现象之间的联系形式及其密切程度，但是，现象内在联系的判断和因果关系的确定，必须以有关学科的理论为指导，结合专业知识和实际经验进行分析研究，才能正确解决。因此，在应用时要把定性分析和定量分析结合起来，在定性分析的基础上开展定量分析。

10.1.3 回归模型的建立

现举一个估计食品支出的恩格尔函数的例子来说明回归模型的建立过程。

食品支出的恩格尔函数，是由德国统计学家恩格尔提出的一种反映食品支出与收入水平之间关系的方程式。最简单的恩格尔函数假定在商品价格不变的条件下，实际的食品支出与实际的收入水平之间的关系可以用一元线性回归模型来反映。表 10－1 中的 Y 和 X 分别是 12 个居民家庭的人均月食品支出与人均月收入水平的样本数据。

表 10－1 12 个居民家庭的人均月食品支出与人均月收入情况 （单位：元）

编号	人均月收入 X	人均月食品支出 Y	XY	X^2	Y^2
1	82	75	6 150	6 724	5 625
2	93	85	7 905	8 649	7 225
3	105	92	9 660	11 025	8 464

续表

编号	人均月收入 X	人均月食品支出 Y	XY	X^2	Y^2
4	130	105	13 650	16 900	11 025
5	144	120	17 280	20 736	14 400
6	150	120	18 000	22 500	14 400
7	160	130	20 800	25 600	16 900
8	180	145	26 100	32 400	21 025
9	200	156	31 200	40 000	24 336
10	270	200	54 000	72 900	40 000
11	300	200	60 000	90 000	40 000
12	400	220	88 000	160 000	48 400
合计	2 214	1 648	352 745	507 434	251 800

首先，设所求回归方程为

$$\hat{Y}_t = a + bX_t$$

根据最小平方法的要求，使实际支出 Y_t 与理论支出 $\hat{Y}_t$ 的离差平方和为最小值，则有

$$Q = \sum(Y_t - \hat{Y}_t)^2 = \sum(Y_t - a - bX_t)^2 = \text{最小值}$$

Q 对 a 和 b 的偏导数必须为零，可得标准方程组如下：

$$\sum Y = an + b\sum X$$

$$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2$$

将根据 Y 和 X 的数据计算的有关统计量(表 10－1 中的合计数)代入上式，可得：

$$b = \frac{n\sum XY - \sum X\sum Y}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{12\times 352\,745 - 2\,214\times 1\,648}{12\times 507\,434 - (2\,214)^2} = \frac{584\,268}{1\,187\,412} = 0.492\,05$$

$$a = \overline{Y} - b\overline{X} = \frac{\sum Y}{n} - b\frac{\sum X}{n} = \frac{1\,648}{12} - 0.492\,05\times\frac{2\,214}{12} = 137.333 - 90.783 = 46.550$$

样本回归方程为：

$$\hat{Y}_t = 46.55 + 0.492\,1X_t$$

上式中，回归系数 $b = 0.492\,1$ 表示人均月收入每增加 1 元，人均月食品支出会增加 0.492 1 元；截距＝46.55 表示即使在人均月收入为 0 的情况下，人均月食品支出也需要 46.55 元。根据该式计算的食品支出在总收入中平均所占的比重为：

$$\hat{Y}_t/X_t = 46.55/X_t + 0.492\,1$$

上式中的 $\hat{Y}/X_t$ 即所谓的恩格尔系数。显而易见，在本例中，恩格尔系数会随着 X_t 的增加而递减，它与恩格尔定律的结论是一致的。

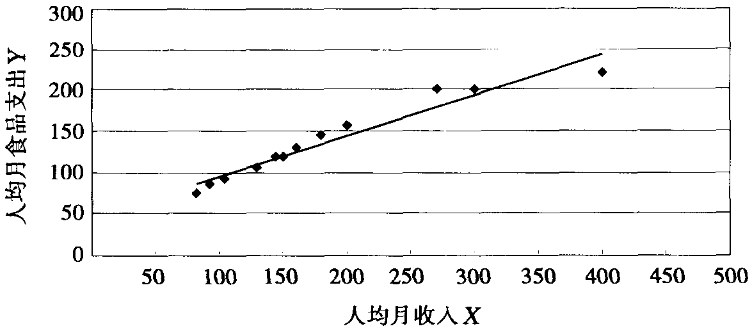


图 10－1 人均月收入与人均月食品支出的关系

10.2 总体回归、样本回归和误差项的标准假定

10.2.1 总体回归函数

进行回归分析通常要设定一定的数学模型。在回归分析中，最简单的模型是只有一个因变量和一个自变量的线性回归模型。这一类模型就是一元线性回归模型，又称简单线性回归模型。该类模型假定因变量 Y 主要受自变量 X 的影响，它们之间存在着近似的线性函数关系，即

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

该函数式被称为总体回归函数。式中的 β_1 和 β_2 是未知的参数，又叫回归系数。X_t 和 Y_t 分别是 Y 和 X 的第 t 次观测值。u_t 是随机误差项，又称随机干扰项，它是一个特殊的随机变量，反映未列入方程式的其他各种因素对 Y 的影响。

如果以 Y 为纵轴，X 为横轴，则上式可以用一条直线来表示。这种确定型的消费函数作为理论分析的一种抽象是允许的。但是，在现实经济生活中，这种确定型的消费函数却是很难成立的。也就是说，在给定的 X 值下，Y 是否都会得到相同的结果？显而易见，这是不可能的。因为，除了 X 之外，还有各种影响 Y 的因素，X 相同下的 Y 却可能千差万别。所以，我们只能说，平均来看 Y 与 X 的关系能够用直线反映。如果用数学形式来表示，可有：

$$E(Y_t) = \beta_1 + \beta_2 X_t$$

上式表明：在 X 的值给定的条件下，Y 的期望值 $E(Y_t)$ 是 X 的严密的线性函数。这条直线被称为总体回归直线。Y 的实际观测值并不一定位于该直线上，只是散布在该直线的周围。我们把各实际观测点与总体回归线垂直方向的间隔，称为随机误差项，也就是定义：

$$u_t = Y_t - E(Y_t)$$

观察 $u_t = Y_t - E(Y_t)$ 的关系，见图 10－2。

10.2.2 样本回归函数

总体回归函数事实上是未知的，需要利用样本的信息对其进行估计。

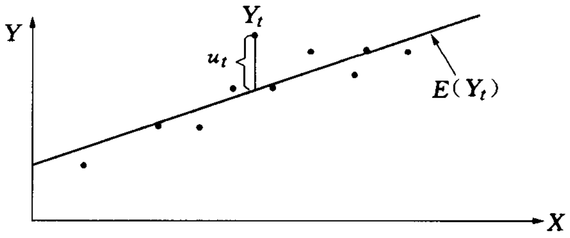


图 10－2　总体回归线与随机误差项

根据样本数据拟合的直线，称为样本回归直线。如果拟合的是一条曲线，则称为样本回归曲线。显然，样本回归线的函数形式应与总体回归线的函数形式一致。一元线性回归模型的样本回归线可表示为：

$$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_t$$

式中 $\hat{Y}_t$ 的是样本回归线上与 X_t 相对应的 Y 值，可视为 $E(Y_t)$的估计；$\hat{\beta}_1$ 是样本回归函数的截距系数，$\hat{\beta}_2$ 是样本回归函数的斜率，它们是对总体回归系数 β_1 和 β_2 的估计。实际观测到的因变量 Y_t 值并不完全等于 $\hat{Y}_t$，如果用 e_t 表示两者之差($e_t = Y_t - \hat{Y}_t$)，则有：

$$Y_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_t + e_t \qquad t = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

上式称为样本回归函数。式中 e_t 称为残差，在概念上，e_t 与总体误差项 u_t 相互对应；n 是样本的容量。

样本回归函数与总体回归函数之间的联系显而易见，这里需要特别指出的是它们之间的区别：第一，总体回归线是未知的，它只有一条；而样本回归线则是根据样本数据拟合的，具有大量性。第二，总体回归函数中的 β_1 和 β_2 是未知的参数，表现为常数，而样本回归函数中的 $\hat{\beta}_1$ 和 $\hat{\beta}_2$ 是随机变量，其具体数值随所抽取的样本观测值不同而变动。第三，总体回归函数中的误差项 u_t 是不可直接观测的，而样本回归函数中的残差项 e_t 可以计算出具体数值。

综上所述，样本回归函数是对总体回归函数的近似反映。回归分析的主要任务就是要采用适当的方法，充分利用样本所提供的信息，使得样本回归函数尽可能地接近于真实的总体回归函数。

10.2.3　误差项的标准假定

随机误差项 u_t 是无法直接观测的，为了进行回归分析，通常需要对其概率分布提出一些假定。这些假定有：

假定 1：误差项的期望值为 0，即对所有的 t，总有 $E(u_t)=0$。

假定 2：误差项的方差为常数，即对所有的 t，总有 $V_{ar}(u_t)=E(u_t^2)=\sigma^2$。

假定 3：误差项之间不存在序列相关关系，其协方差为零，即当 $t \neq s$ 时有：

$$V_{co}(u_t u_s) = E(u_t u_s) = 0$$

假定 4：自变量是给定的变量，与随机误差项线性无关。

假定 5：随机误差项服从正态分布。

以上这些基本假定是德国数学家高斯最早提出的，也称为高斯假定或标准假定。满足以上标准假定的一元线性回归模型，称为标准的一元线性回归模型。

应当指出，在现实经济生活中，由于各种原因，上述标准假定常常不能得到满足。但以标准假定为基础的回归分析理论与方法，对我们研究相关现象在标准状态下的基本规律有帮助，然后可再进一步研究现实存在的非理想状态下可以采用的方法。

如前所述，回归分析的主要任务就是要建立能够近似反映真实总体回归函数的样本回归函数。在根据样本资料确定样本回归方程时，一般总是希望 Y 的估计值从整体来看尽可能地接近其实际观测值。这就是说，残差 e_t 的总量越小越好。可是，由于 e_t 有正有负，简单的代数和会相互抵消，因此，为了数学上便于处理，通常采用残差平方和 $\sum e_t^2$ 作为衡量总偏差的尺度。所谓最小平方法就是根据这一思路，通过使残差平方和为最小来估计回归系数的一种方法。

10.3 总体方差的估计和最小平方估计的性质

10.3.1 总体方差的估计

除了 β_1 和 β_2 外，一元线性回归模型还包括了另一个未知参数，那就是总体随机误差项的方差 σ^2。σ^2 可以反映理论模型误差的大小，它是检验模型时必须利用的一个重要参数。由于随机误差项本身是不能直接观测的，因此，需要用最小平方残差代替随机误差项来估计 σ^2。数学上可以证明，σ^2 的无偏估计 S^2 可由下式给出：

$$S^2 = \sum e_t^2 / (n-2)$$

上式中，分子是残差平方和；分母是自由度，其中 n 是样本观测值的个数，2 是一元线性回归方程中回归系数的个数。在一元线性回归模型中，残差 e_t 必须满足以下两个约束条件：

$$\sum e_t = 0;\quad \sum e_t X_t = 0$$

因而失去了两个自由度，所以其自由度为 $n-2$。

S^2 的正平方根又叫做回归估计的标准误差。S 越小表明实际观测点与所拟合的样本回归线的离差程度越小，即回归线具有较强的代表性。反之，S 越大表明实际观测点与所拟合的样本回归线的离差程度越大，即回归线的代表性较差。

一般采用以下公式计算残差平方和：

由 $e_t = Y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_t$，可推导出下式：

$$\sum e_t^2 = \sum Y_t^2 - \hat{\beta}_1 \sum Y_t - \hat{\beta}_2 \sum X_t Y_t$$

再进一步计算出 $S^2 = \sum e_t^2 / (n-2)$。

根据表 10－1 给出的有关数据计算食品支出恩格尔函数的总体方差 S^2 和回归估计标准差 S：

已知 $\sum Y_t^2 = 251\ 800$，$\sum Y_t = 1\ 648$，$\sum X_t Y_t = 352\ 745$，得：

$$\begin{aligned}\sum e_t^2 &= \sum Y_t^2 - \hat{\beta}_1 \sum Y_t - \hat{\beta}_2 \sum X_t Y_t \\ &= 251\ 800 - 46.55 \times 1\ 648 - 0.492\ 1 \times 352\ 745 = 1\ 499.785\ 5\end{aligned}$$

进一步可得

$$S^2 = 1\,499.785\,5/(12-2) = 149.978\,6$$

进而有

$$S = \sqrt{149.978\,6} = 12.246\,6$$

10.3.2 最小平方估计量的性质

最小平方法是多种估计方法中的一种。按照最小平方法求得的估计总体回归系数的数学公式是样本观测值的函数，通常称之为最小平方估计量。最小平方估计量的形式是不变的，但根据所选取的样本不同，其具体数值即回归系数的估计值却会随之变化，因此，它是一种随机变量。可以证明，在标准假定能够得到满足的条件下，回归系数的最小平方估计量的期望值等于其真值，即有：

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1;\ E(\hat{\beta}_2) = \beta_2$$

其方差为

$$V_{\text{ar}}(\hat{\beta}_1) = \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum(X_t - \bar{X})^2}\right]$$

$$V_{\text{ar}}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum(X_t - \bar{X})^2}$$

最小平方估计量是总体回归系数的线性无偏估计量。数学上还可以进一步证明，在所有的线性无偏估计量中，回归系数的最小平方估计量的方差最小；同时随着样本容量的增大，其方差会不断缩小(证明此处省略)。也就是说，回归系数的最小平方估计量是最优线性无偏估计量和一致估计量。标准线性回归模型中，回归系数的最小二乘估计量所具有的上述性质首先是由数学家高斯和马尔可夫提出并证明的，被称为高斯—马尔可夫定理。这一定理表明，在标准的假定条件下，最小二乘估计量是一种最佳的估计方式。但并不意味着根据这一方式计算的每一个具体的估计值都比根据其他方式计算的具体估计值更接近真值，而只是表明如果反复多次进行估计值计算或是扩大样本的容量进行估计值计算，按最佳估计方式计算的估计值接近真值的可能性(概率)最大。

10.4 一元线性回归模型的估计、检验和预测

10.4.1 一元线性回归模型的估计

根据表 10－1 中 12 个居民家庭的人均月食品支出与人均月收入水平的样本数据，建立一个直线趋势回归方程。由前面已计算出的结果可得所求回归方程为

$$\hat{Y}_t = a + bX_t = 46.55 + 0.492\,1X_t$$

式中：回归系数 $b = 0.492\,1$ 表示人均月收入每增加 1 元，人均月食品支出会增加 0.492 1 元；截距 $a = 46.55$ 表示即使在人均月收入为 0 的情况下，人均月食品支出也需要 46.55 元。

10.4.2 一元线性回归模型的检验

对回归模型中的参数估计后，还必须对其进行检验。回归模型检验的种类有 3 种：理论

意义检验、一级检验和二级检验。

理论意义检验主要涉及参数估计值的符号和取值区间，如果它们与实质性科学的理论以及人们的实践经验不相符，就说明模型不能很好地解释现实的现象。例如，在前面所举的食品支出的恩格尔函数中，β_2 的取值区间应在 0 至 1 之间。如果根据样本数据估计的 $\hat{\beta}_2$ 大于 1 或小于 0，则不能通过经济意义检验。在对实际的社会经济现象进行回归分析时，常常会遇到经济意义检验不能通过的情况，造成这一结果的主要原因是：社会经济的统计数据无法像自然科学中的统计数据那样通过有控制的实验去取得，因而所观测的样本容量有可能偏小，不具有足够的代表性，或者不能满足标准线性回归分析所要求的假定条件。

一级检验又称统计学检验，它是利用统计学中的抽样理论来检验样本回归方程的可靠性，具体又可分为拟合程度评价和显著性检验。一级检验是对所有现象进行回归分析时都必须通过的检验。

二级检验又称经济计量学检验，它是对标准线性回归模型的假定条件能否得到满足进行检验，具体包括序列相关检验、异方差性检验等。二级检验对于社会经济现象的定量分析具有特别重要的意义。本书只讨论一级检验。

(1) 拟合程度的评价

所谓拟合程度，是指样本观测值聚集在样本回归线周围的紧密程度。判断回归模型拟合程度优劣最常用的数量指标是可决系数(又称决定系数)，记为 r^2，其公式可表达如下：

$$r^2 = \mathrm{SSR/SST} = 1 - \mathrm{SSE/SST}$$

上式中：SST 是总的离差平方和；SSR 是由回归直线可以解释的那一部分离差平方和，称为回归平方和；SSE 是用回归直线无法解释的离差平方和，称为剩余残差平方和，亦即残差平方和。

因变量的实际观测值与其样本均值的离差即总离差$(Y_t - \overline{Y})$可以分解为两部分：一部分是因变量的理论回归值与其样本均值的离差$(\hat{Y}_t - \overline{Y})$，它可以看成是能够由回归直线解释的部分，称为可解释离差；另一部分是实际观测值与理论回归值的离差$(Y_t - \hat{Y}_t)$，它是不能由回归直线加以解释的残差 e_t。对任一实际观测值 Y_t，总有

$$(Y_t - \overline{Y}) = (\hat{Y}_t - \overline{Y}) + (Y_t - \hat{Y}_t) = (\hat{Y}_t - \overline{Y}) + e_t$$

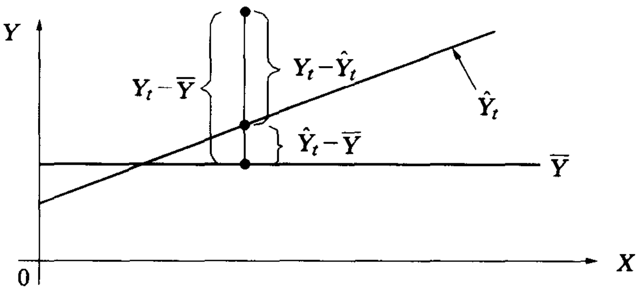


图 10-3 离差示意图

两边平方并求和，得到

$$\sum(Y_t - \overline{Y})^2 = \sum(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2 + \sum(Y_t - \hat{Y}_t)^2 + 2(\hat{Y}_t - \overline{Y})(Y_t - \hat{Y}_t)$$

可以证明

$$\sum(\hat{Y}_t-\overline{Y})(Y_t-\hat{Y}_t)=0$$

从而有

$$\sum(Y_t-\overline{Y})^2=\sum(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2+\sum(Y_t-\hat{Y}_t)^2$$

即

$$\mathrm{SST}=\mathrm{SSR}+\mathrm{SSE}$$

两边同除以 SST，得

$$1=\mathrm{SSR}/\mathrm{SST}+\mathrm{SSE}/\mathrm{SST}$$

显而易见，各个样本观测点与样本回归直线靠得越紧，SSR 在 SST 中所占的比例就越大。因此，可定义这一比例为可决系数，即有

$$r^2=\mathrm{SSR}/\mathrm{SST}=1-\mathrm{SSE}/\mathrm{SST}$$

可决系数是对回归模型拟合程度的综合度量，可决系数越大，模型拟合程度越高；可决系数越小，则模型对样本的拟合程度越差。从数量关系看，可决系数的取值范围为 $0\leqslant r^2\leqslant 1$。当所有的观测值都位于回归直线上时，SST＝0，这时 $r^2=1$，说明总离差可以完全由所估计的样本回归直线来解释；当观测值并不是全部位于回归直线上时，SSE＞0，则 SSE/SST＞0，这时 $r^2<1$；当回归直线没有解释任何离差，即模型中解释变量 X 与因变量 Y 完全无关时，Y 的总离差全部归于残差平方和，即 SSE＝SST，这时 $r^2=0$。

根据表 10－1 中 12 个居民家庭的人均月食品支出与人均月收入水平的样本数据，已知 $\sum Y_t^2=251\,800$，$\sum Y_t=1\,648$，$\sum X_tY_t=352\,745$，得：

$$\begin{aligned}\mathrm{SSE}&=\sum e_t^2=\sum(Y_t-\hat{Y}_t)^2=\sum Y_t^2-\hat{\beta}_1\sum Y_t-\hat{\beta}_2\sum X_tY_t\\&=251\,800-46.55\times1\,648-0.492\,1\times352\,745=1\,499.785\,5\end{aligned}$$

$$\mathrm{SST}=\sum(Y_t-\overline{Y})^2=\sum Y_t^2-(\sum Y_t)^2/n=251\,800-1\,648^2=25\,474.666\,7$$

$$r^2=1-\mathrm{SSE}/\mathrm{SST}=1-1\,499.785\,5/25\,474.666\,7=0.941\,13$$

可决系数 0.941 1 表明人均月收入水平对人均月食品支出的可解释程度高达 94.11%，反映出两者存在高度相关关系，该模型拟合程度好。

（2）显著性检验

回归分析中的显著性检验包括两方面的内容：一是对各回归系数的显著性检验；二是对整个回归方程的显著性检验。对于前者通常采用 t 检验，而对于后者则是在方差分析的基础上采用 F 检验。在一元线性回归模型中，由于只有一个解释变量 X，对 $\beta_2=0$ 的 t 检验与对整个方程的 F 检验是等价的。

所谓回归系数的显著性检验，就是根据样本估计的结果对总体回归系数的有关假设进行检验。对 $\hat{\beta}_1$ 与 $\hat{\beta}_2$ 的检验方法是相同的，但 $\hat{\beta}_2$ 的检验更为重要，因为它表明自变量对因变量线性影响的程度。对回归系数 $\hat{\beta}_2$ 进行显著性检验的基本步骤如下：

首先，提出假设。H_0：$\beta_2=0$，H_1：$\beta_2\neq0$。

其次，计算回归系数的 t 值。计算 t 值的公式是：

$$\begin{aligned}t&=\frac{\hat{\beta}_2-0}{S_{\hat{\beta}}}=\frac{\hat{\beta}_2}{\dfrac{S}{\sqrt{\sum(X_t-\overline{X})^2}}}=\frac{\hat{\beta}_2}{\dfrac{S}{\sqrt{\sum X_t^2-(\sum X_t)^2/n}}}\\&=\frac{0.492\,1}{\dfrac{12.246\,6}{\sqrt{507\,434-2\,214^2/12}}}=\frac{0.492\,1}{0.038\,93}=12.640\end{aligned}$$

以上 t 检验的原理来自回归系数的概率分布。因为 $\hat{\beta}_1$ 和 $\hat{\beta}_2$ 均为线性估计量，是因变量 Y_t 的线性组合。根据误差项的标准假定，可知 Y_t 是服从正态分布的变量，所以 $\hat{\beta}_1$ 和 $\hat{\beta}_2$ 也服从正态分布。我们前面也已给出了 $\hat{\beta}_1$ 和 $\hat{\beta}_2$ 的期望值与方差。若令

$$\sigma^2_{\hat{\beta}_1}=\sigma^2\left[\frac{1}{n}+\frac{\overline{X}^2}{\sum(X_t-\overline{X})^2}\right]$$

$$\sigma^2_{\hat{\beta}_2}=\frac{\sigma^2}{\sum(X_t-\overline{X})^2}$$

则有

$$\hat{\beta}_1\sim N(\beta_1,\ \sigma^2_{\hat{\beta}_1});\ \hat{\beta}_2\sim N(\beta_2,\ \sigma^2_{\hat{\beta}_2})$$

在总体方差已知的情况下，利用上述正态分布可以按照假设检验一章中所介绍的 Z 检验方法去对总体回归系数进行假设检验。可是，一般来说，总体方差 σ^2 是未知的，要用其无偏估计量 S^2 去代替。用 $S_{\hat{\beta}}$代表$\hat{\beta}_i(i=1,2)$的标准差的估计值，当样本为小样本时，回归系数估计值的标准化变换值服从 t 分布

$$t=\frac{\hat{\beta}_i-\beta_i}{S_{\hat{\beta}i}}\sim t(n-2)$$

式中的 n 为样本容量，$n-2$ 为自由度。

第三，确定显著水平 $\alpha=5\%$ 和临界值。查《t 分布表》(附录 2 表 5)可得自由度为 $n-2=12-2=10$ 的双侧 t 检验的临界值为 2.228 1。

从理论上看，显著水平的大小根据犯哪一类错误可能带来的损失确定。一般情况下，取 0.05 或 0.01。在双侧检验的场合，查 t 分布表所确定的临界值是$(-t_{\alpha/2})$和$(t_{\alpha/2})$；而在单侧检验的场合，所确定的临界值是(t_α)。

最后，作出判断。由于计算的 t 值(12.64)大于临界值(2.23)，所以拒绝原假设 H_0，接受备择假设 H_1，即认为收入水平对食品支出的影响是显著的。

10.4.3 一元线性回归模型的预测

前面已求出 12 个居民家庭人均月食品支出与人均月收入水平的回归方程为

$$\hat{Y}_t=a+bX_t=46.55+0.492\,1X_t$$

当人均月收入为 $X_t=450$ 时，可以得到人均月食品支出的点估计预测值为

$$\hat{Y}_t=a+bX_t=46.55+0.492\,1X_t=46.55+0.492\,1\times450=268.00(\text{元})$$

$\hat{Y}_t$ 是根据样本回归方程计算的，它是样本观测值的函数，因而也是一个随机变量，它与所要预测的 Y 的真值之间必然存在一定的误差。在实际的回归模型预测中，发生预测误差的原因可以概括为以下 4 个：

(1) 模型本身中的误差因素所造成的误差(u_i)。由于总体回归函数并未将所有影响 Y 的因素都纳入模型，同时其具体的函数形式也只是实际变量之间数量联系的近似反映，因此必然存在误差。这一误差可以用总体随机误差项的方差来评价。

(2) 由于回归系数的估计值与其真值不一致所造成的误差$(\beta_1-\hat{\beta}_1)+(\beta_2-\hat{\beta}_2)X_i$。样本回归系数是根据样本估计的，它与总体回归系数之间总是有一定的误差。这一误差可以用回

归系数的最小平方估计量的方差来评价。

（3）由于自变量 X 的设定值同其实际值的偏离所造成的误差。

（4）由于未来时期总体回归系数发生变化所造成的误差。

在以上造成预测误差的原因中，（3）、（4）两项不属于回归方程本身的问题，而且也难以事先予以估计和控制。因此，以下假定只存在前面两种误差。

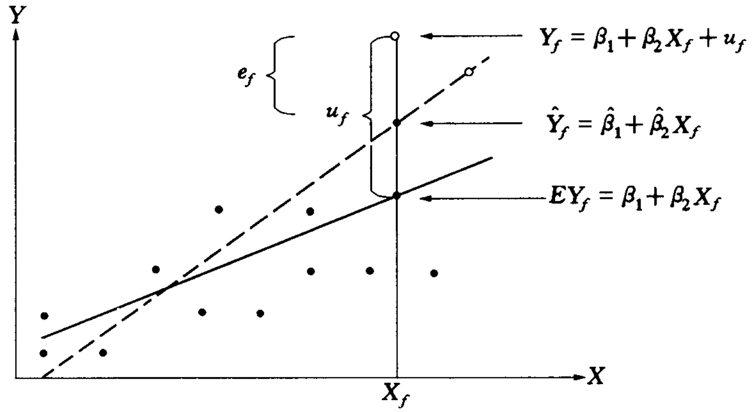


图 10－4　预测误差示意图

如图 10－4 所示，设 X_f 给定时，有

Y 的真值为 $Y_f = \beta_1 + \beta_2 X_f + u_f$

总体回归直线上　$EY_f = \beta_1 + \beta_2 X_f$

样本回归直线上　$\hat{Y}_f = \beta_1 + \beta_2 X_f$

则有

$$e_f = Y_f - \hat{Y}_f = (\beta_1 + \beta_2 X_f + u_f) - (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_f) = (\beta_1 - \hat{\beta}_1) + (\beta_2 - \hat{\beta}_2) X_f + u_f$$

式中，e_f 是预测的残差。

利用期望值与方差的运算规则以及前面给出的回归系数最小平方估计量的期望值和方差，可以证明：

$$E(e_f) = 0$$

$$V_{\mathrm{ar}}(e_f) = \sigma^2\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_f - \overline{X})^2}{\sum (X_t - \overline{X})^2}\right]$$

在此基础上，还可以进一步证明 $\hat{Y}_f$ 是 Y_f 的最优线性无偏预测。

$\hat{Y}_f = a + bX_f = 46.55 + 0.4921 \times 450 = 268.00$(元)是对 Y_f 的点估计，在许多场合人们更为关心的是对 Y_f 的区间估计：

$$Y_f = \hat{Y}_f \pm \Delta$$

在标准假定条件下，e_f 服从于正态分布，即

$$e_f \sim N(0,\ V_{\mathrm{ar}}(e_f))$$

由于 $V_{\mathrm{ar}}(e_f)$ 中的 σ^2 是未知的，通常用其无偏估计 S^2 来代替。若用 S_{e_f} 来表示预测标准误差的估计值，则

$$S_{e_f}=S\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(X_f-\overline{X})^2}{\sum(X_t-\overline{X})^2}}$$

按照确定置信区间的方法，可以得出 Y_f 的$(1-\alpha)$的预测区间为：

$$Y_f=\hat{Y}_f\pm\Delta=\hat{Y}_f\pm t_{\alpha/2}(n-2)S_{e_f}$$

式中，$t_{\alpha/2}(n-2)$是置信度为$(1-\alpha)$、自由度为$(n-2)$的 t 分布的临界值。

当人均月收入为 $X_f=450$ 时，可以得到人均月食品支出的点估计预测值为

$$\hat{Y}_f=a+bX_f=46.55+0.492\,1X_t=46.55+0.492\,1\times450=268.00(\text{元})$$

给定显著水平 $\alpha=5\%$，查《t 分布表》可得自由度为 $n-2=12-2=10$ 的双侧 t 检验的临界值$t_{\alpha/2}$为 2.228 1。

$$S_{e_f}=S\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(X_f-\overline{X})^2}{\sum(X_t-\overline{X})^2}}=12.246\,6\times\sqrt{1+\frac{1}{12}+\frac{(450-2\,214/12)^2}{507\,434-2\,214^2/12}}$$

$$=12.246\,6\times1.047\,72=12.831$$

$$Y_f=\hat{Y}_f\pm\Delta=\hat{Y}_f\pm t_{\alpha/2}(n-2)S_{e_f}=268\pm2.228\,1\times12.831=268\pm28.59$$

因此，当人均月收入为 450 元时，置信度为 95% 的人均月食品支出的预测区间将落入：

$$239.41(\text{元})\leqslant Y_f\leqslant296.59(\text{元})$$

对于每一个给定的 X 值，计算相应的 Y 的预测区间，并将连接各点的曲线描绘在平面图上，便可得到图 10－5。

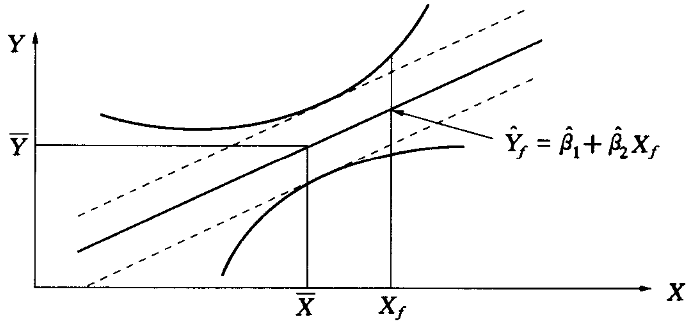


图 10－5　回归预测的置信区间

从置信区间和 S_{e_f}的计算公式以及图 10－5 中，可以得到以下结论：

第一，置信区间的上下限对称地落在样本回归直线两边，呈中间小两头大的喇叭形。当 $X_f=\overline{X}$ 时的置信区间最窄，而当 X_f 远离$\overline{X}$ 时，其置信区间逐渐增大。这就是说，在用回归模型进行预测时，X_f 的取值不宜离开$\overline{X}$ 过远，否则预测精度将会大大降低，使预测失效。

第二，在样本容量 n 保持不变时，$t_{\alpha/2}(n-2)$的值，随置信度$(1-\alpha)$的提高而增加，因此，要求预测值的概率保证程度增加，在其他条件不变时，也就意味着预测精度的降低。

第三，当其他条件不变时，$t_{\alpha/2}(n-2)$和 S_{e_f}的值均为样本容量 n 的减函数，即随着 n 的增加，这两者将逐渐减少。这说明，随着样本容量的增加，预测精度将会提高，而样本容量过小，预测的精度就较差。

第四，当 n 足够大时，S_{e_f}会趋近于S；$t_{\alpha/2}(n-2)$会趋近于 $Z_{\alpha/2}$。这时，可以用 S 和

$Z_{\alpha/2}$取代 S_{e_f}和 $t_{\alpha/2}$来确定预测区间。即样本容量充分大时，Y_f 的置信区间为：

$$Y_f = \hat{Y}_f \pm \Delta = \hat{Y}_f \pm Z_{\alpha/2} \times S$$

按上式确定的预测区间的上、下限在平面图上呈两条直线(参见图 10－5 中与样本回归线平行的两条虚线)。

10.5　多元线性回归分析

10.5.1　标准的多元线性回归模型

人均月食品支出的变动，不仅受到人均月收入的影响，还要受到食品价格、消费习惯和消费政策等因素的影响。在许多场合，仅仅考虑单个变量是不够的，需要多个自变量来进行考察，才能获得比较满意的结果。这就产生了测定多因素之间相关关系的问题。

研究在线性相关条件下，两个和两个以上自变量对一个因变量的数量变化关系，称为多元线性回归分析，表现这一数量关系的数学公式，称为多元线性回归模型。多元线性回归模型是一元线性回归模型的扩展，其基本原理与一元线性回归模型相类似，只是在计算上比较麻烦一些而已。多元线性回归模型总体回归函数的一般形式如下：

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + u_t$$

上式假定因变量 Y 与$(k-1)$个自变量之间的回归关系可以用线性函数来近似反映。式中，Y_t 是变量 Y 的第 t 次观测值；X_{jt}是第 j 个自变量 X_j 的第 t 次观测值($j=2$，…，k)；u_t 是随机误差项；β_1，β_2，…，β_k 是总体回归系数。β_j 表示在其他自变量保持不变的情况下，自变量 X_j 变动一个单位所引起的因变量 Y 平均变动的数额，叫做偏回归系数。该式中，总体回归系数是未知的，必须利用有关的样本观测值来进行估计。

假设已给出了 n 次观测值，同时 $\hat{\beta}_1$，$\hat{\beta}_2$，…，$\hat{\beta}_k$ 为总体回归系数的估计，则多元线性回归模型的样本回归函数如下：

$$Y_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2t} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{kt} + e_t$$

式中，e_t 是 Y_t 与其估计值 $\hat{Y}_t$ 之间的离差，即残差。为了进行多元线性回归分析的推断需要提出一些必要的假定，这些假定除了包括前面已经提出的关于随机误差项的假定外，还要追加一条，这就是回归模型所包含的自变量之间不能具有较强的线性关系，作为标准假定 6。

10.5.2　多元回归模型的估计

我们收集了全国 7 个农业实验站的小麦产量、施肥量和降雨量的数据，为预测小麦产量提供依据，见表 10－2。

表 10-2 小麦产量、施肥量和降雨量的数据

小麦产量 Y(公斤/亩)	施肥量 X_1(公斤/亩)	降雨量 X_2(厘米)
500	40	25
600	50	50
600	60	25
800	70	75
750	80	50
750	90	50
900	100	75

注：1 亩 = 1/15 公顷。

建立多元回归模型方法如下：

（1）设所求多元回归模型表现为二元回归方程：

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2$$

（2）运用最小平方法求参数 b_0、b_1、b_2：

Y 为实际观测值，根据最小平方法的要求，使观测值 Y 对拟合值 $\hat{Y}$ 的偏差平方和达到最小，即$\sum(Y-\hat{Y})^2 = \sum(Y - b_0 - b_1X_1 - b_2X_2)^2$ = 最小值，从而可得到求参数 b_0、b_1、b_2 的标准方程组为：

$$\begin{cases} \sum Y = nb_0 + b_1\sum X_1 + b_2\sum X_2 \\ \sum X_1 Y = b_0\sum X_1 + b_1\sum X_1^2 + b_2\sum X_1X_2 \\ \sum X_2 Y = b_0\sum X_2 + b_1\sum X_1X_2 + b_2\sum X_2^2 \end{cases}$$

表 10-3 二元回归计算表

编号	小麦产量（公斤/亩）Y	施肥量（公斤/亩）X_1	降雨量（厘米）X_2	X_1^2	X_2^2	X_1X_2	X_1Y	X_2Y
1	500	40	25	1 600	625	1 000	20 000	12 500
2	600	50	50	2 500	2 500	2 500	30 000	30 000
3	600	60	25	3 600	625	1 500	36 000	15 000
4	800	70	75	4 900	5 625	5 250	56 000	60 000
5	750	80	50	6 400	2 500	4 000	60 000	37 500
6	750	90	50	8 100	2 500	4 500	67 500	37 500
7	900	100	75	10 000	5 625	7 500	90 000	67 500
合计	4 900	490	350	37 100	20 000	26 250	359 500	260 000

将表中数据代入上列方程组，得

$$\begin{cases}4\,900=7b_0+490b_1+350b_2\\ 359\,500=490b_0+37\,100b_1+26\,250b_2\\ 260\,000=350b_0+26\,250b_1+20\,000b_2\end{cases}$$

解联立方程组，可得到 b_0、b_1、b_2，即

$$b_0=266.67,\ b_1=3.81,\ b_2=3.33$$

（3）由求出的参数可得如下二元线性回归方程：

$$\hat{Y}=266.67+3.81X_1+3.33X_2$$

方程的直观意义为

$$\text{产量}=266.67+3.81\,\text{施肥量}+3.33\,\text{降雨量(公斤/亩)}$$

回归系数 $b_1=3.81$ 表明，降雨量不变时，施肥量每增加 1 公斤将引起产量增加 3.81 公斤。

回归系数 $b_2=3.33$ 表明，施肥量不变时，降雨量每增加 1 厘米将引起产量增加 3.33 公斤。

10.5.3 多元回归模型的检验

（1）拟合优度检验

对多元回归模型进行拟合优度检验，计算可决系数或判定系数 R^2。

$$R^2=\frac{\text{回归偏差}}{\text{总偏差}}=\frac{\sum(\hat{Y}-\overline{Y})^2}{\sum(Y-\overline{Y})^2}=1-\frac{\sum(Y-\hat{Y})^2}{\sum(Y-\overline{Y})^2}=1-\frac{\sum e^2}{\sum(Y-\overline{Y})^2}$$

将 $\hat{Y}=b_0+b_1X_1+b_2X_2$ 代入上式，得如下简捷公式并将以上计算所得数据代入：

$$\begin{aligned}R^2&=\frac{\sum(\hat{Y}-\overline{Y})^2}{\sum(Y-\overline{Y})^2}=\frac{b_0\sum Y+b_1\sum X_1Y+b_2\sum X_2Y-(\sum Y)^2/n}{\sum Y^2-(\sum Y)^2/n}\\&=\frac{266.67\times4\,900+3.81\times359\,500+3.33\times260\,000-4\,900^2/7}{3\,545\,000-4\,900^2/7}\\&=\frac{112\,163.3}{115\,000}=0.975\,3\end{aligned}$$

可决系数 $R^2=0.975\,3$ 表明施肥量和降雨量对产量变动的解释程度占 97.53%，控制好施肥量和降雨量是增产的主要途径。

需要说明的是，只有施肥量一个自变量时，一元回归方程为 $\hat{Y}=287+5.89X_1$，可决系数为 $R^2=0.845\,5$，增加降雨量后可决系数提高了。只有降雨量一个自变量时，一元回归方程为 $\hat{Y}=400+6X_2$，可决系数为 $R^2=0.782\,6$。可见，增加自变量总是可以提高可决系数的。为此，一定要消除那些增加了自变量对因变量的变动并无实际意义的可决系数部分，考虑回归系数的个数(k)，计算修正后的可决系数 $\overline{R}^2$：

$$\begin{aligned}\overline{R}^2&=1-(1-R^2)(n-1)/(n-k)\\&=1-(1-0.975\,3)\times(7-1)/(7-2)=0.970\,4\end{aligned}$$

（2）显著性检验

显著性检验的内容主要包括对回归系数进行 t 检验和对回归模型整体进行 F 检验。

首先从 t 检验开始。

对总体的偏回归系数 b_1、b_2 作如下假设：

H_0：$b_1=0$；H_1：$b_1\neq0$；H_0：$b_2=0$；H_1：$b_2\neq0$。

计算偏回归系数 b_1、b_2 的检验统计量：

$$t=\frac{b_1}{\hat{\sigma}_{b_1}},\quad t=\frac{b_2}{\hat{\sigma}_{b_2}}$$

式中 $\hat{\sigma}_{b_1}$ 和 $\hat{\sigma}_{b2}$ 分别是偏回归系数 b_1 和 b_2 标准差的估计值，有

$$\hat{\sigma}_{b_1}=S_{y(x_1,x_2)}\cdot\sqrt{\frac{\sum(X_2-\overline{X}_2)^2}{\sum(X_1-\overline{X}_1)^2\sum(X_2-\overline{X}_2)^2-[\sum(X_1-\overline{X}_1)(X_2-\overline{X}_2)]^2}}$$

$$\hat{\sigma}_{b_2}=S_{y(x_1,x_2)}\cdot\sqrt{\frac{\sum(X_1-\overline{X}_1)^2}{\sum(X_1-\overline{X}_1)^2\sum(X_2-\overline{X}_2)^2-[\sum(X_1-\overline{X}_1)(X_2-\overline{X}_2)]^2}}$$

式中，$S_{y(x_1,x_2)}$ 表示二元回归方程的标准误差，即

$$S_{y(x_1,x_2)}=\sqrt{\frac{\sum(Y-\hat{Y})^2}{n-3}}=\sqrt{\frac{\sum Y^2-b_0\sum Y-b_1\sum X_1Y-b_2\sum X_2Y}{n-3}}$$

这里，$n-3$ 为自由度，因为二元回归模型中有 3 个参数 b_0、b_1 和 b_2，求解该回归方程时失去 3 个自由度。

表 10－4　t 检验计算表

编号	施肥量（公斤/亩）X_1	降雨量（厘米）X_2	$(X_1-\overline{X}_1)^2$	$(X_2-\overline{X}_2)^2$	$(X_1-\overline{X}_1)(X_2-\overline{X}_2)$
1	40	25	900	625	750
2	50	50	400	0	0
3	60	25	100	625	250
4	70	75	0	625	0
5	80	50	100	0	0
6	90	50	400	0	0
7	100	75	900	625	750
合计	490	350	2 800	2 500	1 750

$$S_{y(x_1,\ x_2)}=\sqrt{\frac{2\,836.7}{7-3}}=\sqrt{709.175}=26.630\,3$$

$$\hat{\sigma}_{b_1}=26.630\,3\times\sqrt{\frac{2\,500}{2\,800\times2\,500-1\,750^2}}=26.630\,3\times\sqrt{\frac{2\,500}{3\,937\,500}}$$

$$=26.630\,3\times0.025\,2=0.671\,02$$

$$\hat{\sigma}_{b_2}=26.630\,3\times\sqrt{\frac{2\,800}{3\,937\,500}}=26.630\,3\times0.026\,67=0.710\,14$$

b_1 的检验统计量 $t = 3.81/0.671 = 5.678$，b_2 的检验统计量 $t = 3.33/0.7101 = 4.689$。

设显著性水平为 5%，查自由度为 $n-3$ 的 t 分布表得 $t_{0.05/2}(7-3) = 2.7764$。因为 b_1 和 b_2 的 t 统计量都大于临界值，所以都拒绝原假设。

下面进行 F 检验。

F 检验是对回归模型整体的显著性进行检验，因为回归模型整体的显著性是不能由任何一个偏回归系数的显著性所替代的。假设总体回归方程不显著，即有

$$H_0: b_1 = b_2 = 0; \quad H_1: b_1 \text{ 和 } b_2 \text{ 中至少有一个不等于零}$$

由离差平方和的分解公式可知，回归模型的总离差平方和等于回归平方和与残差平方和的和。回归模型总体函数的线性关系是否显著，其实质就是判断回归平方和与残差平方和之比值的大小问题。由于回归平方和与残差平方和的数值会随观测值的样本容量和自变量个数的不同而变化，因此不宜直接比较，而必须在方差分析的基础上(见表 10－5)利用 F 检验进行。

表 10－5　方差分析表

离差名称	离差平方和	自由度	方差
回归平方和	$SSR = \sum(\hat{Y} - \overline{Y})^2 = 112\,163.3$	$k-1=2$	$SSR/(k-1) = 56\,081.65$
残差平方和	$SSE = \sum(Y - \hat{Y})^2 = 2\,836.7$	$n-k=4$	$SSE/(n-k) = 709.175$
总离差平方和	$SST = \sum(Y - \overline{Y})^2 = 115\,000$		

求 F 统计量，即

$$F = \frac{SSR/(k-1)}{SSE/(n-k)} = \frac{56\,081.65}{709.175} = 79.08$$

查显著水平为 5%，自由度为(2，4)的 F 分布表(附录 2 表 7)，可知 $F_{0.05}(2, 4) = 6.94$，远远低于计算的 F 值。因此，可以认为该回归方程所描述的线性相关关系是比较显著的，已建立的二元线性回归模型有效。

10.5.4　多元回归模型的预测

我们已经得到了二元线性回归方程为

$$\hat{Y} = 266.67 + 3.81X_1 + 3.33X_2$$

当给定施肥量为 $X_{10} = 110$ 公斤和降雨量为 $X_{20} = 80$ 厘米时，可以得到产量的点估计预测值为：

$$\hat{Y}_0 = 266.67 + 3.81 \times 110 + 3.33 \times 80 = 952.17 (\text{公斤/亩})$$

当给定置信度为 95% 时，求出产量预测值将落入如下区间：

$$Y_0 = \hat{Y}_0 \pm \Delta = \hat{Y}_0 \pm t_{0.05/2}(n-3) \cdot S_{y(x_1, x_2)} \sqrt{1 + C_0}$$

其中：

$$C_0 = \frac{1}{n} + \frac{(X_{10} - \overline{X}_1)^2 \sum (X_2 - \overline{X}_2)^2}{D} + \frac{(X_{20} - \overline{X}_2)^2 \sum (X_1 - \overline{X}_1)^2}{D} - 2 \cdot \frac{(X_{10} - \overline{X}_1)(X_{20} - \overline{X}_2) \sum (X_1 - \overline{X}_1)(X_2 - \overline{X}_2)}{D}$$

$$D=\sum(X_1-\overline{X}_1)^2\cdot\sum(X_2-\overline{X}_2)^2-[\sum(X_1-\overline{X}_1)(X_2-\overline{X})]$$

$$=2\,800\times 2\,500-1\,750=6\,998\,250$$

$$C_0=\frac{1}{7}+\frac{(110-70)^2\times 2\,500}{6\,998\,250}+\frac{(80-50)^2\times 2\,800}{6\,998\,250}-2\times\frac{(110-70)\times(80-50)\times 1\,750}{6\,998\,250}$$

$$=0.142\,857+0.571\,57+0.360\,09-0.600\,15=0.474\,37$$

$$\Delta=t_{0.05/2}(n-3)\cdot S_{y(x_1,x_2)}\sqrt{1+C_0}$$

$$=2.776\,4\times 26.630\,3\times\sqrt{1+0.474\,37}=89.776(\text{公斤/亩})$$

$$Y_0=\hat{Y}_0\pm\Delta=952.17\pm 89.78\ \text{即}(862.39\ \text{公斤/亩，}1\,041.95\ \text{公斤/亩})$$

10.5.5 非线性回归的直线化

在统计分析中，经常会遇到变量之间呈现非线性相关关系，可以通过变量转换方法使其成为线性回归问题。其步骤如下：

（1）作散点图，观察图形特征。

（2）根据图形选择近似曲线方程。

(a)双曲线$\frac{1}{Y}=a+\frac{b}{X}$(图 10－6)

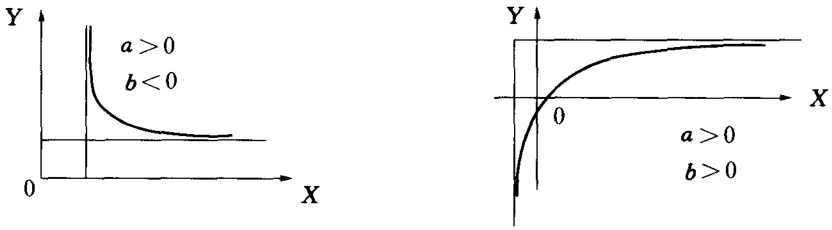


图 10－6 双曲线

(b)对数曲线 $Y=a+b\log X$(图 10－7)

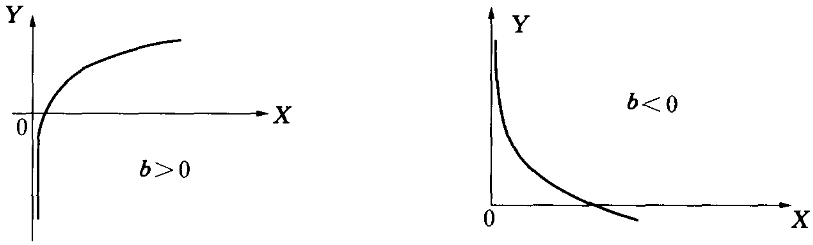


图 10－7 对数曲线

(c)指数曲线 $Y=a\mathrm{e}^{bX}$(图 10－8)

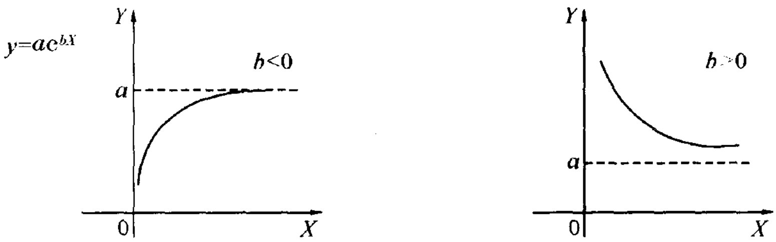


图 10－8　指数曲线

(d)幂函数 $Y=aX^{b}$(图 10－9)

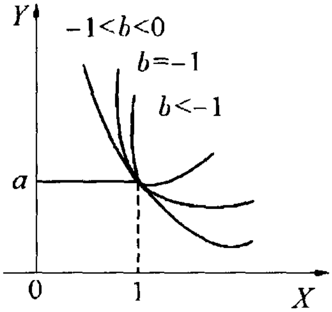


图 10－9　幂函数

(e)S 型曲线 $Y=\dfrac{1}{a+\dfrac{b}{\mathrm{e}^{X}}}$(图 10－10)

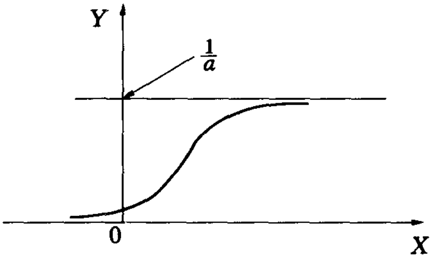


图 10－10　S 型曲线

(3) 对变量进行变换，将曲线方程转化为直线方程。

表 10－6 曲线方程及其线性变换

曲线方程	变换公式	变换后的线性方程
(a)双曲线$\frac{1}{Y}=a+\frac{b}{X}$	$x'=1/X$ $y'=1/Y$	$y'=a+bx'$
(b)对数曲线 $Y=a+b\log X$	$x'=\ln X$ $y'=Y$	$y'=a+bx'$
(c)指数曲线 $Y=ae^{bX}$	$x'=X$ $y'=\ln Y$	$y'=a'+bx'$ $(a'=\ln a)$
(d)幂函数 $Y=aX^b$	$x'=\ln X$ $y'=\ln Y$	$y'=a'+bx'$ $(a'=\ln a)$
(e)S型曲线 $Y=\frac{1}{a+\frac{b}{e^X}}$	$x'=e^{-x}$ $y'=1/Y$	$y'=a+bx'$

（4）经相关性检验后，再还原到曲线方程。

【本章小结】

回归分析是对现象之间相关关系及数量变动关系的测定方法。两种现象之间的回归关系可以用线性回归模型来测定。用最小平方法估计的总体回归系数估计值是一个随机变量，必须对其估计量进行检验后才能获得较好的预测效果。多元回归分析是一元回归分析的扩展形式。

练习 10

1 什么是回归分析？什么是相关分析？它们之间有何联系和区别？

2 什么是总体回归函数？什么是样本回归函数？它们之间有什么联系和区别？

3 设销售收入 X 为自变量，销售成本 Y 为因变量。现已根据某百货公司 12 个月的有关资料计算出以下数据(单位：万元)：

$$\sum(\hat{X}_t-\overline{X})^2=425\,053.73 \qquad \overline{X}=647.88$$
$$\sum(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2=262\,855.25 \qquad \overline{Y}=549.8$$
$$\sum(\hat{X}_t-\overline{X})(Y-\overline{Y})=334\,229.09$$

要求：

（1）拟合简单线性回归方程，并对方程中回归系数的经济意义作出解释。

（2）计算可决系数和回归估计的标准误差。

（3）对回归系数进行显著性水平为 5% 的显著性检验。

（4）假定明年 1 月销售收入为 800 万元，利用拟合的回归方程预测相应的销售成本，并给出置信度为 95% 的预测区间。

4试根据下表的资料，要求：

（1）以消费为因变量、国内生产总值为自变量，拟合线性回归方程。

（2）计算回归估计的标准误差和可决系数。

（3）对回归系数进行显著性水平为 5% 的显著性检验。

（4）假定 2002 年我国的国内生产总值为 105 880 亿元，利用拟合的回归方程预测该年可能达到的消费额，并给出置信度为 95% 的预测区间。

我国的国内生产总值与最终消费　　（单位：亿元）

年份	国内生产总值	消费	年份	国内生产总值	消费
1978	3 605.6	2 239.1	1988	14 704.0	9 360.1
1979	4 073.9	2 619.4	1989	16 466.0	10 556.5
1980	4 551.3	2 976.1	1990	18 319.5	11 365.2
1981	4 901.4	3 309.1	1991	21 280.4	13 145.9
1982	5 489.2	3 637.9	1992	25 863.6	15 952.1
1983	6 076.3	4 020.5	1993	34 500.6	20 182.1
1984	7 164.4	4 694.5	1994	47 110.9	27 216.2
1985	8 792.0	5 773.0	1995	59 404.9	34 529.4
1986	10 132.8	6 542.0	1996	69 366.0	41 039.5
1987	11 784.0	7 451.2	1997	76 077.2	44 768.2

资料来源：《中国统计年鉴》I(中国统计出版社，1998 年版)。

5什么是标准多元线性回归模型？它与标准一元线性回归模型有什么联系和区别？

6什么是修正自由度的可决系数？为什么要对可决系数进行修正？

7试讨论以下几种场合回归方程 $Y_t=\beta_1+\beta_2X_{2t}+\beta_3X_{3t}+u_t$ 中回归系数的经济意义和应取的符号。

（1）Y_t 为商业利润率；X_{2t}为人均销售额；X_{3t}为流通费用率。

（2）Y_t 为粮食销售量；X_{2t}为人口数：X_{3t}为人均收入。

（3）Y_t 为工业总产值；X_{2t}为占用的固定资产；X_{3t}为职工人数。

（4）Y_t 为国内生产总值；X_{2t}为工业总产值；X_{3t}为农业总产值。

8什么是单相关、复相关和偏相关？什么是线性相关和非线性相关？请各举一例说明。

9在直线回归方程 $y=a+bx$ 中，参数 a 和 b 的几何意义和经济意义是什么？

10应用相关与回归分析应注意什么问题？

11某工业企业某种产品产量与单位成本资料如下：

年份	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
产品产量(万件)	2	3	4	3	4	5	6	7
单位成本(元/件)	73	72	71	73	69	68	66	65

要求：

（1）根据上述资料，绘制相关图，判别该数列相关与回归的种类；

（2）配合适当的回归方程；

（3）根据回归方程，指出每当产量增加 1 万件时，单位成本变动如何？

（4）计算相关系数，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 时，对回归方程进行显著性检验；

（5）计算估计标准误差；

（6）当产量为 8 万件时，在 95.45 的概率保证程度下，对单位成本作区间估计。

⑫下表列出了六个工业发达国家在 1979 年的失业率 y 与国民经济增长率 x 的数据。

国家	国民经济增长率 x(%)	失业率 y(%)
美国	3.2	5.8
日本	5.6	2.1
法国	3.5	6.1
西德	4.5	3
意大利	4.9	3.9
英国	1.4	5.7

（1）请研究 y 与 x 之间的关系；

（2）建立 y 关于 x 的一元线性回归方程；

（3）对所求得的回归方程作显著性检验，在检验时你作了什么假定？(取 $\alpha=0.05$)

（4）若一个工业发达国家的国民经济增长率 $x=3\%$，请求其失业率的预测值。

11 统计决策

学习目标 本章要求掌握统计决策的原理和基本方法，重点掌握期望值决策法和贝叶斯决策方法。

11.1 统计决策概述

统计决策是为实现业已确定的目标抉择行动方案，也即对“做什么”和“怎么做”的问题作出回答。这使统计在国民经济宏观调控和企业微观管理中发挥着更大的作用。自 20 世纪 50 年代瓦尔德发表《统计决策函数》以来，统计决策的理论和方法发展很快，应用日益广泛。在竞争激烈、瞬息万变的市场经济中，学习和掌握科学的决策方法，对于提高经营管理的决策水平，减少决策失误，无疑有十分重要的意义。

统计决策是根据已掌握信息对实现的目标的未来行动所作出的决定。决策的主体、目标、环境和行动方案构成了决策系统的四个基本因素。在管理中，决策者经常会遇到各种决策问题，如确定型问题、不确定型问题和对抗型问题。在决策中，就有确定型决策、不确定型决策和对抗型决策等决策类型。无论哪种决策类型，都要经过确定决策目标、拟定决策方案、预测方案得失、选择最优方案和实施方案等五个基本决策程序。

一般来说，统计决策有广义和狭义之分，凡是应用统计方法进行的决策称为广义的统计决策。狭义的统计决策是指不确定情况下的决策。在不确定情况下进行决策需要具备以下 4 个条件：

（1）决策人要求达到的一定目标，如利润最大，损失最小，质量最高，等等。从不同的目的出发往往有不同的决策标准。

（2）存在两个或两个以上可供选择的方案，所有的方案构成一个方案的集合。

（3）存在不以决策人主观意志为转移的客观状态，或称为自然状态。所有可能出现的自然状态构成状态空间。

（4）在不同情况下采取不同方案所产生的结果是可以计量的。所有的结果构成一个结果空间。

凡符合这 4 个条件的决策，即称为狭义的统计决策。统计决策面对着的是各种不确定性因素，因此，统计决策的最显著特点是运用概率进行判断和抉择。在这个过程中，常用到决策、收益(损失)和风险 3 个重要的基本概念。决策是对方案的选择，不同的方案带来的收益或损失不同，最佳方案是能够使平均风险达到最小的方案。

要作出正确的决策，必须遵循可行性、经济性和合理性 3 条原则。决策的首要原则是提供给决策者选择的每一方案在技术上、资源条件上必须是可行的。经济性原则也即最优化原则。通过多种方案的分析比较，所选定的决策方案应能比采取其他方案获得更好的经济效益

或免受更大的亏损风险。选择决策方案时，不一定费力去寻求经济上"最优"的方案，而是选择使人满意的方案。也就是说，在某些情况下，应该以令人满意的合理的准则代替经济上最优的准则。

本章主要介绍狭义的统计决策中的风险型决策方法。

11.2　风险型决策方法

11.2.1　以期望值为准则的决策方法

决策的方法与所选择的决策准则直接相关，期望值准则是风险型决策最常用的准则。以期望值为准则进行决策的基本方法是：根据收益表(或亏损表)，计算各行动方案的收益期望值，然后从中选择期望收益最大(或亏损最小)的方案为最优方案。各个方案的期望收益值由以下公式计算得到：

$$E(A_i)=\sum_{j=1}^{n}X_{ij}P_j$$

式中，$E(A_i)$为第 i 个方案的损益期望值；X_{ij}表示第i 个方案在第j 种状态下的损益值；P_j 表示第j 种状态发生的概率；n 为总共可能发生的状态数目。

例 11－1　某施工单位对下月是否要开工进行决策。如果开工，天气好时可获利 10 万元，天气不好时将赔 2 万元；如果不开工，无论天气好坏都要赔 0.4 万元。根据预测表明，天气好的概率为 0.8，天气不好的概率为 0.2。按期望值决策准则对以上方案进行决策。

解：根据已知资料，可编制收益表如表 11－1。

表 11－1　某施工单位的收益表

收益 / 方案 / 概率 / 状态		天气好	天气坏
概率		0.8	0.2
A_1	开工	10	－2
A_2	不开工	－0.4	－0.4

以上 A_1 代表开工，A_2 代表不开工，计算得到两种方案的期望值如下：

$$E(A_1)=10\times0.8+(-2)\times0.2=0.4(\text{万元})$$

$$E(A_2)=(-0.4)\times0.8+(-0.4)\times0.2=-0.4(\text{万元})$$

按期望值准则，应选取期望收益最大者：$\max\{0.4,\ -0.4\}=0.4$。所以，应选择开工的方案。

例 11－2　某公司对每件产品进行检验的费用是0.1元，而每件产品的退货损失为 1.25 元。根据历史记录，各种不合格率发生的概率资料如表 11－2 所示。每 1 000 件装成一箱出售，试用期望值决策准则对整箱检验还是不检验进行决策。

表 11-2 某公司每箱产品检验费用亏损表

方案 \ 费用额 \ 概率 \ 状态		不合格品率		
		5%	10%	15%
		0.6	0.3	0.1
A_1	整箱检验	100	100	100
A_2	整箱不检验	62.5	125	187.5

解：根据表 11-2 提供的数据，设 A_1 为整箱检验，A_2 为整箱不检验，计算得到两种方案的期望费用支付额为

$$E(A_1)=100(\text{元}),$$

$$E(A_2)=62.5\times0.6+125\times0.3+187.5\times0.1=93.75(\text{元})$$

按期望值准则应选取期望支付额最小者

$$\min\{100,\ 93.75\}=93.75$$

所以，应选择整箱不检验的方案。

11.2.2 以最大可能性为准则的决策方法

当各种自然状态出现的概率相差较大，且有一种状态出现的概率明显地高于其他自然状态的概率时，则可以只考虑概率最大的那个自然状态下各行动方案的损益值，从中择优选取最佳方案。这就是以最大可能性为准则的决策方法。

例 11-3 目前市场上正流行羊绒服装，某服装厂打算在原有的基础上增加羊绒大衣的生产。现有两种方案：方案一，引进一条新的生产线进行大批量生产；方案二，利用原有设备挖掘潜力进行小批量试产。通过对市场的调查、分析测算，得到的收益表如表 11-3。

表 11-3 某服装厂生产羊绒大衣的损益表

方案 \ 收益 \ 概率 \ 状态	羊绒服装热继续	羊绒服装热下降	期望收益（万元）
	0.25	0.75	
引进新生产线	240	-50	22.5
不引进新生产线	50	10	20

根据期望值准则，“引进新生产线”是最优方案，但是从一次性损益考虑，“羊绒服装热下降”的概率最大，采用最大可能性为准则进行决策的结果，应该选择“不引进新生产线”方案，进行小批量试产。

11.2.3 决策树

决策树是由决策点□、方案枝——、状态点○、概率枝——、终点●等构成的一种类似树木的决策图。

例 11-4 某公司为生产某种新产品而设计了两种基本建设方案，一个方案是建大厂，

另一个方案是建小厂，建大厂需投资 300 万元，建小厂需投资 140 万元，两者的使用期都是 10 年，无残值。估计在寿命期内产品销路好的概率是 0.7，产品销路差的概率是 0.3，两种方案的年度损益值如表 11－4 所示。试用决策树进行决策。

表 11－4　年度损益值

状态 / 概率 / 收益 / 方案	销路好	销路差
	0.7	0.3
建大厂	100	－20
建小厂	40	30

解：(1) 首先根据资料画出决策树：见图 11－1。

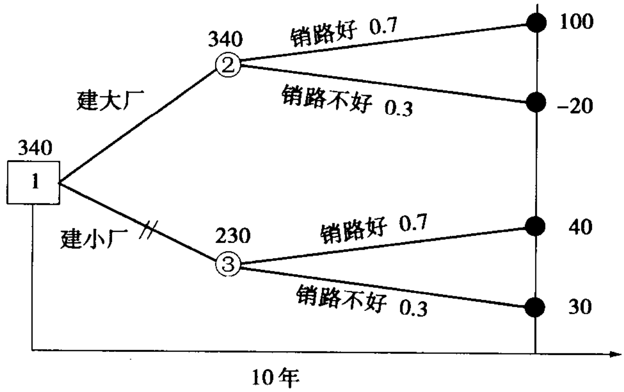


图 11－1　决策树

(2) 计算各状态点的期望收益值：

点 2：$[100\times0.7+(-20)\times0.3]\times10-300=340$(万元)；

点 3：$(40\times0.7+30\times0.3)\times10-140=230$(万元)。

将计算结果填入决策树中相应的状态点。

(3) 作出抉择：点 2 大于点 3，即建大厂方案优于建小厂方案。在建小厂方案上标志“//”，表示被淘汰方案。

11.2.4　贝叶斯决策方法

风险型决策方法依据概率进行决策，具有一定的风险性。概率分为先验概率和后验概率。先验概率是根据历史资料或主观判断所确定的概率，并未经试验证实。依此进行决策的风险必然很大。为了减少这种风险，就要通过科学试验、调查、统计分析等方法获得较为准确的信息，修正先验概率，并据以确定各个方案的期望损益值，拟订出可供选择的决策方案。贝叶斯决策方法便是这种以获得新的信息修正先验概率，按后验概率进行分析判断的决策方法。

在已具备先验概率的情况下，一个完整的贝叶斯决策过程包括以下几个步骤：

（1）进行预后验分析，决定是否值得搜集补充资料以及从补充资料可能得到的结果和如何决定最优对策；

（2）搜集补充资料，取得条件概率，包括历史概率和逻辑概率，对历史概率要加以检验，辨明它是否适合计算后验概率；

（3）用概率乘法定理计算联合概率，用概率加法定理计算边际概率，用贝叶斯定理计算后验概率；

（4）用后验概率进行决策分析。

在贝叶斯决策中，先验分析是进行更深入分析的必要条件。决策者常常考虑是否要搜集和分析追加的信息，并权衡所需增加的费用及其对决策者的价值，对比这些信息的费用与根据预后验分析作出决策的风险和可能结果。所以，这种预后验分析主要涉及两个问题：一是要不要追加信息，或者说追加信息对决策者有多大的价值；二是如果追加信息应采取什么策略行动。所以，所谓预后验分析，实际上是后验概率决策分析的一种特殊形式，也即用一套概率对多种行动策略组合，从中择优。

例 11－5 某工厂要研制开发一种新型童车，首要的问题是要研究这种新产品的销路及竞争者的情况。他们估计：当新产品销路好时，采用新产品可盈利 $X_{11}=8$ 万元；生产老产品，则因其他竞争者会开发新产品，而使老产品滞销，工厂可能亏损 $X_{12}=-4$ 万元；当新产品销路不好时，采用新产品就要亏损 $X_{21}=-3$ 万元；不采用新产品，就有可能用更多的资金来发展老产品，获利 $X_{22}=10$ 万元。现确定销路好(A_1)的概率为 $P(\mathrm{A}_1)=0.6$，销路差(A_2)的概率为 $P(\mathrm{A}_2)=0.4$。

采用新产品方案(U_1)的期望值：

$$\begin{aligned}E(\mathrm{U}_1)&=\sum_{j=1}^{n}X_{1j}P(A_j)=X_{11}P(\mathrm{A}_1)+X_{12}P(\mathrm{A}_2)\\&=8\times0.6+(-3)\times0.4=3.6(\text{万元})\end{aligned}$$

不采用新产品方案(U_2)的期望值：

$$\begin{aligned}E(\mathrm{U}_2)&=\sum_{j=1}^{n}X_{2j}P(A_j)=X_{21}P(\mathrm{A}_1)+X_{22}P(\mathrm{A}_2)\\&=(-4)\times0.6+10\times0.4=1.6(\text{万元})\end{aligned}$$

以上所示的数据即为先验分析，可根据其中所列出的期望值作为决策标准，选择行动方案 A_1。

为了对先验概率进行补充和修正，就要进行实际（自然状态）调查。分别在销路好(A_1)和销路差(A_2)两种情况下进行调查，结果如下：

第一，在销路好(A_1)的情况（自然状态）下进行调查，其结果对原来的先验概率 $P(\mathrm{A}_1)=0.6$ 有三种修改：

（1）认为销路好的概率为 $P(\mathrm{a}_1/\mathrm{A}_1)=0.8$，原概率修改为 $P(\mathrm{A}_1)P(\mathrm{a}_1/\mathrm{A}_1)=0.6\times0.8=0.48$；

（2）认为销路差的概率为 $P(\mathrm{a}_2/\mathrm{A}_1)=0.1$，原概率修改为 $P(\mathrm{A}_1)P(\mathrm{a}_2/\mathrm{A}_1)=0.6\times0.1=0.06$；

（3）认为销路不确定的概率为 $P(\mathrm{a}_3/\mathrm{A}_1)=0.1$，原概率修改为 $P(\mathrm{A}_1)P(\mathrm{a}_3/\mathrm{A}_1)=0.6\times0.1=0.06$。

第二，在销路差的情况(自然状态)下(A_2)进行调查，其结果对原来的先验概率 $P(A_2)=0.4$ 有三种修改：

（1）认为销路好的概率为 $P(a_1/A_2)=0.1$，原概率修改为 $P(A_2)P(a_1/A_2)=0.4\times0.1=0.04$；

（2）认为销路差的概率为 $P(a_2/A_2)=0.75$，原概率修改为 $P(A_2)P(a_1/A_2)=0.4\times0.75=0.3$；

（3）认为销路不确定的概率为 $P(a_3/A_2)=0.15$，原概率修改为 $P(A_2)P(a_1/A_2)=0.4\times0.15=0.06$。

对以上修改后的概率进行整理，得到三类共六种修改先验概率：

第 a_1 类(1)种：认为销路好而实际上就是好的概率：

$$P(A_1/a_1)=\frac{P(A_1)P(a_1/A_1)}{P(a_1)}=\frac{P(A_1)P(a_1/A_1)}{P(A_1)P(a_1/A_1)+P(A_2)P(a_1/A_2)}$$

$$=\frac{0.48}{0.48+0.04}=\frac{0.48}{0.52}=0.923$$

第 a_1 类(2)种：认为销路好而实际上是差的概率：

$$P(A_2/a_1)=\frac{P(A_2)P(a_1/A_2)}{P(a_1)}=\frac{P(A_2)P(a_1/A_2)}{P(A_1)P(a_1/A_1)+P(A_2)P(a_1/A_2)}$$

$$=\frac{0.04}{0.48+0.04}=\frac{0.04}{0.52}=0.077$$

第 a_2 类(1)种：认为销路差而实际上好的概率：

$$P(A_1/a_2)=\frac{P(A_1)P(a_2/A_1)}{P(a_2)}=\frac{P(A_1)P(a_2/A_1)}{P(A_1)P(a_2/A_1)+P(A_2)P(a_2/A_2)}$$

$$=\frac{0.06}{0.06+0.3}=\frac{0.06}{0.36}=0.167$$

第 a_2 类(2)种：认为销路差而实际上就是差的概率：

$$P(A_2/a_2)=\frac{P(A_2)P(a_2/A_2)}{P(a_2)}=\frac{P(A_2)P(a_2/A_2)}{P(A_1)P(a_2/A_1)+P(A_2)P(a_2/A_2)}$$

$$=\frac{0.3}{0.06+0.3}=\frac{0.3}{0.36}=0.833$$

第 a_3 类(1)种：认为销路好坏不确定而实际上好的概率：

$$P(A_1/a_3)=\frac{P(A_1)P(a_3/A_1)}{P(a_3)}=\frac{P(A_1)P(a_3/A_1)}{P(A_1)P(a_3/A_1)+P(A_2)P(a_3/A_2)}$$

$$=\frac{0.06}{0.06+0.06}=\frac{0.06}{0.12}=0.5$$

第 a_3 类(2)种：认为不确定而实际上差的概率：

$$P(A_2/a_3)=\frac{P(A_2)P(a_3/A_2)}{P(a_3)}=\frac{P(A_2)P(a_3/A_2)}{P(A_1)P(a_3/A_1)+P(A_2)P(a_3/A_2)}$$

$$=\frac{0.06}{0.06+0.06}=\frac{0.06}{0.12}=0.5$$

根据以上调查修改后的概率，针对销路好(a_1)、销路差(a_2)和销路不确定(a_3)分别对行动方案 U_1 和 U_2 计算期望值，并作出决策。

第一套销路好的方案：

（1）销路好(a_1)时采用新产品方案(U_1)的期望值：

$$E(U_1/a_1)=X_{11}P(A_1/a_1)+X_{12}P(A_2/a_1)$$
$$=8\times0.923+(-3)\times0.077=7.153(万元)$$

（2）销路好(a_1)时不采用新产品方案(U_2)的期望值：

$$E(U_2/a_1)=X_{21}P(A_1/a_1)+X_{22}P(A_2/a_1)$$
$$=(-4)\times0.923+10\times0.077=-2.92(万元)$$

比较结果，选择期望值最大方案 $E(U_1/a_1)=7.153$(万元)。

第二套销路差的方案：

（1）销路差(a_2)时采用新产品方案(U_1)的期望值：

$$E(U_1/a_2)=X_{11}P(A_1/a_2)+X_{12}P(A_2/a_2)$$
$$=8\times0.167+(-3)\times0.833=-1.16(万元)$$

（2）销路好(a_2)时不采用新产品方案(U_2)的期望值：

$$E(U_2/a_2)=X_{21}P(A_1/a_2)+X_{22}P(A_2/a_2)$$
$$=(-4)\times0.167+10\times0.833=7.66(万元)$$

比较结果，选择期望值最大方案 $E(U_2/a_2)=7.66$(万元)。

第三套销路不确定的方案：

（1）销路不确定(a_3)时采用新产品方案(U_1)的期望值：

$$E(U_1/a_3)=X_{11}P(A_1/a_3)+X_{12}P(A_2/a_3)=8\times0.5+(-3)\times0.5=2.5(万元)$$

（2）销路好(a_1)时不采用新产品方案(U_2)的期望值：

$$E(U_2/a_3)=X_{21}P(A_1/a_3)+X_{22}P(A_2/a_3)=(-4)\times0.5+10\times0.5=3(万元)$$

比较结果，选择期望值最大方案 $E(U_2/a_3)=3$(万元)。

把以上所选销路好(a_1)、销路差(a_2)和销路不确定(a_3)3套方案中期望值最大者与相对应的概率相乘，得出调查修改后的期望利润值：

$$E(U/a)=P(a_1)E(U_1/a_1)+P(a_2)E(U_2/a_2)+P(a_3)E(U_2/a_3)$$
$$=0.52\times7.153+0.36\times7.66+0.12\times3=6.84(万元)$$

对比可知，在只作先验分析，不作进一步的调查研究时，最佳方案所得期望利润值为3.6万元，而如果作进一步的调查研究，由于信息量的增加使我们决策更有把握，可能达到的期望利润值为6.84万元。这两个数值之差(6.84－3.60)＝3.24万元，就是获得信息的价值。

以上决策方案的计算和选择可采用决策树形式来进行。

贝叶斯决策的优点表现在：

（1）提供了一个进一步研究的科学方法。也就是说，它能对信息的价值或是否需要采集新的信息作出科学的判断。

（2）它能对调查结果的可靠性加以数量化的评价，而不是像一般的决策方法，对调查结果或者是完全相信，或者是完全不相信。

（3）贝叶斯决策将主观概率同调查结果这两种信息结合起来进行分析判断，减少了判断的片面性。

（4）它可以反复地运筹，使决策逐步完善。

贝叶斯决策方法也有其局限性，主要表现在：

(1) 它需要的数据多，计算工作量大。

(2) 有些数据必须采用主观概率，难以使人信服。

【本章小结】

统计决策是利用信息对可选方案进行选择的行为。选择决策的准则是决策中的关键问题。贝叶斯决策法是考虑了先验信息和补充信息后进行决策的方法，因而是比期望值决策法更具有稳定性的决策方法。

练习 11

1 什么是统计决策？它包括哪些基本步骤？

2 设某贸易公司近期有三笔生意可做，其收益表下表所示。

状态		A_1	A_2	A_3
概率		0.4	0.4	0.2
方案	方案一	300	150	−150
	方案二	200	200	−100
	方案三	100	100	80

(1) 试画出该决策问题的决策树；

(2) 根据期望值准则进行决策。

3 什么是贝叶斯决策？为什么要进行贝叶斯决策？

4 常用的风险型决策方法有哪几种？试对它们加以比较。

5 什么是决策树法？它有何优点？

6 什么是贝叶斯决策？它有何优缺点？

7 某医院对本院医生的服务态度进行评估，以往的评估显示，有 70% 的医生的服务态度为良好，有 30% 的医生的服务态度为一般。这次评估中，以前评为良好的医生中，有 80% 人仍然是良好；而在以前评为一般的医生中，这次有 30% 的人达到了良好。现在有一名医生的评估是良好，问他在以前的评估中是良好的概率是多少？

8 某杂志零售商店，对《大众电影》每月需求量份数，根据历史资料估计如下表所示：

每月销售量(千本)	1	2	3	4	5
概率	0.1	0.15	0.3	0.25	0.2

这种杂志每本零售价为 0.8 元，每本批进价为 0.6 元。试问该店作出购进杂志数量的最优决策：

(1) 若卖不出去的杂志可以按批进价退回，该店每月应订购多少本《大众电影》？

(2) 若卖不出去的杂志不能退回，但下月可以按零售价对折，即按每本 0.4 元出售，这

样，该店每月应订购多少本《大众电影》?

⑨某工程队承担一座桥梁的施工任务。由于施工地区夏季多雨，需停工三个月。在停工期间该工程队可将施工机构搬走或留在原处。如搬走，需搬运费 1 800 元。如留原处，一种方案是花 500 元筑一护堤，防止河水上涨发生高水位的侵袭。若不筑护堤，发生高水位侵袭时将损失 10 000 元。如下暴雨发生洪水时，则不管是否筑护堤，施工机械留在原处都将受到 10 000 元的损失。根据历史资料，该地区夏季出现洪水的概率为 2%，出现高水位的概率为 25%，出现正常水位的概率为 73%，试用决策树方法为该施工队作出最优决策。

⑩某厂的甲、乙两车间生产同一种产品，产量分别是每天 300 件和 500 件，已知甲车间产品合格率为 90%，乙车间合格率为 95%，求此工厂的这种产品的合格率?

⑪某工厂有一套自动生产设备，每次生产前该设备需要经过精密调整，以确保质量。依以往经验可知，若该设备调整良好，则生产的产品有 95% 为合格品，若不成功，则仅有 30% 的产品为合格品。此外由以往的记录，调整成功的次数占 75%。该厂做完一次调整工作后，就试生产数件，以判断设备有没有调整好。若试生产一件产品，发现其为不合格品，试据此判断设备是否已调好?

⑫某食品公司考虑是否把一种新食品投放市场。公司决策者估计，这种新食品受消费者欢迎的概率为 0.6，不受欢迎的概率为 0.4，如果受欢迎，则可获利 40 000 元：如果不受欢迎，则亏损 35 000 元。如果在决定是否产销这种新食品之前进行市场调查，调查结果有受欢迎和不受欢迎两种。调查结果与实际情况之间关系如下：

实际状态	调查结果为受欢迎的概率	调查结果为不受欢迎的概率
受欢迎	0.8	0.2
有受欢迎	0.1	0.9

市场调查费用为 10 000 元。那么，该公司若根据经验的知识(即先验概率)，不进行市场调查，应如何决定？若进行市场调查，又应如何作决策？是否有必要作市场调查?

附录1　Excel在统计中的应用①

中文Excel概述

一、中文Excel简介

Microsoft Excel是美国微软公司开发的Windows环境下的电子表格系统，系Microsoft Office办公室自动化集成软件的重要组成部分。Microsoft Excel是目前应用最为广泛的表格处理软件之一。自Excel诞生以来，主要历经了Excel 3.0、Excel 4.0、Excel 5.0、Excel 95、Excel 97和Excel 2000等不同版本。随着版本的不断提高，Excel强大的数据处理功能和操作的简易性逐渐走入了一个新的境界，整个系统的智能化程度也不断提高，它甚至可以在某些方面判断用户的下一步操作，使用户操作大为简化。这些特性，已使Excel成为现代办公软件重要的组成部分。

Excel具有强有力的数据库管理功能、丰富的宏命令和函数、强有力的决策支持工具。它具有以下主要特点。

（一）强大的数据分析能力

Excel除了可以做一些一般的计算工作外，还有400多个函数，用来做统计、财务、数学、字符串等操作以及各种工程上的分析与计算。Excel还专门提供了一组现成的数据分析工具，这些分析工具为复杂的统计分析工作带来极大的方便。

（二）操作简便

Excel中有多种操作方式，包括快捷菜单、工具按钮、宏命令操作等。

（三）图表能力

在Excel中，系统大约有100多种不同格式的图表可供选用，用户只要做几个简单的按键动作，就可以制作精美的二维或三维图表。

（四）数据库管理能力

对于一个公司，每天都会产生许多新的业务数据，例如，销售数据、库存变化数据、人事变动的数据资料等。这些数据必须加以处理，才能知道每段时间的销售金额变化情况、某个时候的存货量、每个员工的应发工资为多少等。要对这些数据进行有效的处理，就离不开数据库系统。在Excel中提供了类似的数据库管理功能，保存在工作表内的数据都是按照相应的行和列存储的。这种数据结构再加上Excel提供的有关处理数据库的命令和函数，使得Excel具备了组织和管理大量数据的能力。

（五）宏语言功能

利用Excel中的宏语言功能，用户可以将经常要执行的操作的全过程记录下来，并将此

---

① 附录1摘自袁卫，庞浩，曾五一主编. 统计学. 北京：高等教育出版社，2001

过程用一简单的组合按键或工具按钮保存起来。这样，在下一次操作中，只需按下所定义的宏功能的相应按键或工具按钮即可完成操作，而不必重复整个过程。例如，可以编写一个打开最后编辑文件且可以在Excel打开之后自动执行的宏，以后当每次用户打开Excel后，将自动打开上一次编辑的工作簿。

在Excel中，高级用户可使用Visual Basic语言进行宏命令的开发。利用宏命令，用户可以将Excel的下拉菜单和对话框更改或将图形按钮的内容和说明更换，使它们更适合于用户的工作习惯和特殊要求。

（六）样式功能

在Excel中，用户可以利用各种文字格式化的工具和制图工具，制作出美观的报表；在打印以前可将其放大或缩小进行观察。用户还可以对待打印的文件作格式微调，使打印出的报表更为美观。用户将打印格式制作好之后，可将它存储成样本，以后读取此样本文件就可依据样本文件的格式打印出美观的报表。Excel的专业文书处理程序具有样式工具。所谓样式，就是将一系列格式化的组合用一个名称来表示，以后要使用这些格式化的组合时，只要引用此名称即可，因此可大幅度地节省表格式化的时间。

（七）对象连接和嵌入功能

利用对象连接和嵌入功能，用户可将其他软件（例如“画笔”）制作的图形插入到Excel的工作表中。当需要更改图案时，只要在图案上双击鼠标键，制作该图案的程序就会自动打开，图案将出现在该图形编辑软件内，修改、编辑后的图形也会在Excel内显示出来。也可以将一个声音文件或动画文件嵌入到Excel工作表中，使工作表变成一幅声形并茂的报表。

（八）连接和合并功能

通常，每项工作在一张工作表上执行即可，但有时需要同时打开多张工作表以进行比较或汇总。例如，公司内每个分公司每月都会有会计报表，要将各分公司区的资料汇总起来，就需要用到连接和合并功能。Excel很容易将工作表连接起来，并进行汇总工作。Excel中的一个文件就是一个工作簿，每个工作簿文件由若干张工作表组成。用户可以将不同报表存放在一个工作簿的不同工作表中，用于比较、汇总或进行其他操作。

二、Excel的安装和启动

以下以Excel 97为例，说明Excel的安装过程。如果没作特别说明，这里所介绍的内容都是针对Excel 97的。

Excel 97作为Office 97系统中的一个应用程序，它的工作平台为Windows 95或其以上的版本。对中文Excel而言，最好安装在中文Windows系统平台之上。

（一）安装Excel

1. 在CD－ROM中放入Office 97光盘。

2. Office 97光盘一般具有自动执行的功能，自动执行之后，直接点取安装屏幕上的“开始安装”按钮，即可开始Office的安装（如果光盘不具有自动执行的功能，单击Windows的“开始”按钮并选择“运行”命令，在弹出的“运行”对话框中，利用“浏览”按钮寻找光盘上的安装程序“SETUP.EXE”，找到后单击“确定”按钮，运行该程序即可）。

3. 开始安装后，系统将要求用户选择安装模式：“典型”、“自定义”、“快速”。用户可根据需要选择安装模式，一般可以选择“典型”安装方式，那么安装软件将装入最常用的

Office 组件，如果用户想定制所要安装的组件，那么可以选择“自定义”安装方式，而“快速”安装方式是一种最节约磁盘空间的安装方式，它仅装入 Office 运行中不能缺少的组件。

然后，用户可按屏幕逐步提示，完成剩下安装过程。最后，重新开机，就可以开始使用 Excel。

（二）Excel 的启动与退出

启动 Excel 的常用方法是：单击任务栏上的“开始”按钮，此时屏幕上出现一个弹出式菜单，将鼠标指向“程序”项后，屏幕出现另一个弹出菜单，单击“Microsoft Excel”程序项，就可以启动 Excel 系统，此时屏幕上出现如图附－1 所示的 Excel 主工作画面。若安装 Excel 时生成了“快捷工具栏”，则双击其中的 Excel 按钮也可立即启动 Excel。

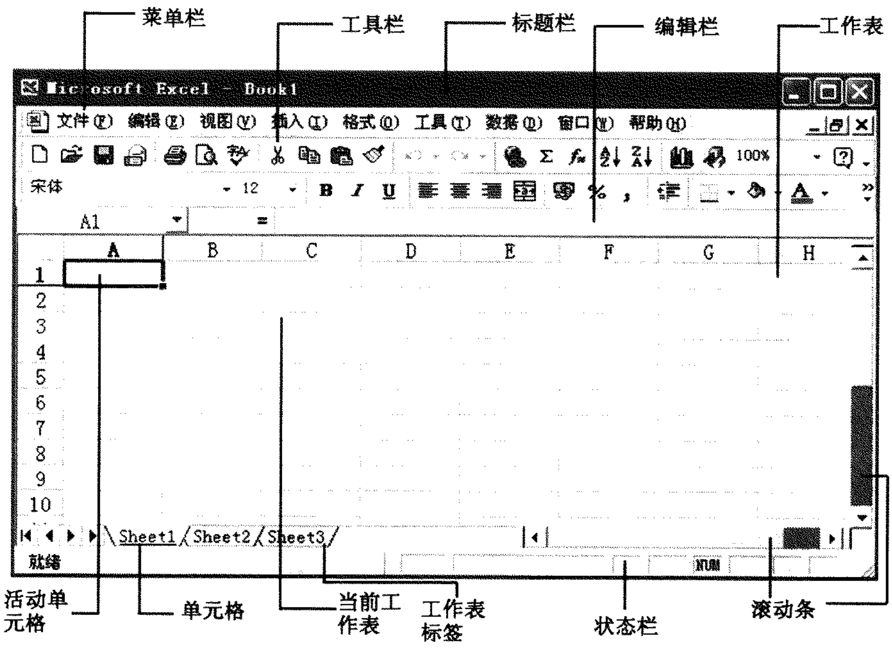
退出 Excel 常用的方法是：保存当前编辑的文件之后，用鼠标单击标题栏的 ☒ 按钮或进入“文件”菜单栏单击“退出”选项。

三、Excel 工作界面简介

按图附－1 从上到下的顺序，Excel 工作界面包含如下几项内容：“标题”栏、“菜单”栏、“工具”栏、“编辑”栏、工作表、工作表标签、滚动条和“状态”栏。下面分别介绍它们的作用。

（一）“标题”栏

“标题”栏告诉用户正在运行的程序名称和正在打开的文件的名称。如图附－1 所示，标题栏显示“Microsoft Excel－Book1”表示此窗口运行的应用程序为 Microsoft Excel，在 Excel 中打开的文件的文件名为 Book1.xls。



图附－1 Excel 的工作界面

（二）“菜单”栏

“菜单”栏按功能把 Excel 命令分成不同的菜单组，它们分别是“文件”、“编辑”、“视图”、“插入”、“格式”、“工具”、“表格”、“帮助”。当菜单项被选中时，引出一个下拉式菜单，可以从中选取相应的子菜单。

另外，在屏幕的不同地方单击鼠标右键时，“快捷菜单”将出现在鼠标指针处。选取“快捷菜单”中的命令同从菜单栏的菜单上选取相应命令的效果是一样的，但选取速度明显增快。

（三）“工具”栏

Excel 可显示几种工具栏，这些工具栏可起到简化用户的操作的作用。“工具”栏中的按钮都是菜单中常用命令的副本，当鼠标指向某一按钮后，稍等片刻在按钮右下方会显示该按钮命令的含意。用户可以配置“工具”栏的内容，通过“视图”菜单中的“工具”栏子菜单来选择显示不同类型的“工具”栏。下面介绍出现在 Excel 开始屏幕中的两种“工具”栏。

1.“常用”工具栏：“常用”工具栏中为用户准备了 Excel 最常用命令的快捷按钮，如“新建文件”按钮，“打开文件”按钮，“保存文件”按钮，“撤销”按钮等。

2.“格式”工具栏：“格式”工具栏专门放那些和文本外观有关的命令，如字体、字号、颜色、对齐方式及其他选项。

（四）“编辑”栏

“编辑”栏用于显示和输入活动单元格的信息。在“编辑”栏中用户可以输入和编辑公式。“编辑”栏位于图附－1 中第 5 行。

“编辑”栏由“名字”栏和“公式”栏组成。位于“编辑”栏左侧的“名字”栏中显示的是活动单元格的坐标，也可在“名字”栏中直接输入一个或一块单元格的地址进行单元格的快速选定；位于“编辑”栏右侧的“公式”栏可用于编辑活动单元格的内容，它包含三个按钮和一个编辑区。当向活动单元格输入数据时，公式栏中便出现三个按钮，三个按钮从左至右分别是：“×”（取消）按钮、“√”（确认）按钮和“＝”（公式指南）按钮。

通常 Excel 在工作区中显示“编辑”栏。在“视图”菜单中的“编辑栏”命令是一个开关命令，它可以用于控制隐藏或显示“编辑”栏。

（五）工作表

工作簿窗口包含了 16 张独立的工作表（sheet）。开始时，窗口中显示第一张工作表“Sheet 1”，该表为当前工作表。当前工作表只有一张，用户可通过点击工作表下方的标签激活其他工作表为当前工作表。

工作表是一个由行和列组成的表格。行号和列号分别用字母和数字加以区别。行由上至下范围 1～65 536，列号则由左到右采用字母编号 A～IV，因此每张表格的大小为 256 列×65 536 行。若从 Excel 导入的数据超过以上范围，则会被 Excel 自动截去。每一个行、列坐标所指定的位置称之为单元格。在单元格中用户可以键入符号、数值、公式以及其他内容。

（六）工作表标签

工作表标签通常用“Sheet 1”，“Sheet 2”等名称来表示，用户也可以通过右击标签名，选择弹出菜单中“重命名”命令来修改标签名。Excel 一般同时显示工作表队列中的前 3 个标签。利用标签队列左边的一组标签滚动按钮可显示队列中的后续工作表的标签。工作簿窗口中的工作表称之为当前工作表，当前工作表的标签为白色，其他为灰色。

（七）“滚动”栏

当工作表很大时，如何在窗口中查看表中的全部内容呢？可以使用工作簿窗口右边及下边的滚动栏，使窗口在整张表上移动查看，也可以通过修改常用“工具”栏中“显示比例框”的参数来扩大整个工作表的显示范围。

（八）“状态”栏

“状态”栏位于 Excel 窗口底部，它的左端是信息区，右端是键盘状态区。

在信息区中，显示的是 Excel 的当前工作状态。例如，当工作表准备接受命令或数据时，信息区显示“就绪”；当在“编辑”栏中键入新的内容时，信息区显示“输入”；当选取菜单命令或工具按钮时，信息区显示此命令或工具按钮用途的简要提示。

在键盘状态区中，显示的是若干按键的开关状态。例如，当［Caps Lock］灯亮时，状态栏中便显示“CAPS”。

在“视窗”菜单中的“状态”命令也是一个开关命令，它可以用于隐藏或显示“状态”栏。

Excel 基本操作

一、Excel 操作方法概述

要完成任一项 Excel 操作，一般都可以采用三种操作方法：鼠标操作、菜单操作和键盘命令操作。例如，想要将 A1 单元格的数据复制到 A2 单元格去，有如下几种操作方法：

1. 鼠标操作法：先用鼠标选中 A1 单元格，然后缓慢移动鼠标到 A1 单元格的右下角，当鼠标的形状变为黑色实心“十”字形之后，拖动鼠标到 A2 单元格，最后放开鼠标，则 A1 的数据就复制到 A2 单元格了。

2. 菜单操作法：先用鼠标选中 A1 单元格，选择“编辑”菜单中的“复制”命令，然后用鼠标选中 A2 单元格，再选择“编辑”菜单中的“粘贴”命令，数据就复制到 A2 单元格了。

3. 键盘命令操作法：直接用鼠标选中 A2 单元格，从键盘输入“＝A1”命令，则复制即告完成。

以上是 Excel 中很典型的三种操作方法。在实际使用过程中，应根据实际情况，尽量选择三种方法中最简洁的操作方法，以提高操作速度。

二、文件基本操作

1. 新建文件：进入“文件”菜单栏，选择“新建”即可创建一个新的 Excel 文件。

2. 打开文件：进入“文件”菜单栏，选择“打开”子菜单，可在 Excel 中打开一个已经存在的数据文件。它可以是 Excel 的数据文件，也可是 Excel 兼容的其他软件的数据文件。可在不同窗口中同时打开多个数据文件，通过“窗口”菜单下方的不同选项，进行不同窗口的切换。

3. 保存文件：进入“文件”菜单栏，选择“保存”命令，可保存当前数据文件。如果选择“另存为”，可将当前工作簿存为一个新的文件。保存文件的格式可以是 Excel 的数据文件，也可是 Excel 兼容的其他软件的数据文件。

4．文件打印：进入“文件”菜单栏，选择“打印”，可打印当前的工作簿文件。打印之前，可以选择“文件”菜单栏的“页面设置”和“打印预览”选项，进行打印前的页面设置操作和打印效果的预先浏览。

三、数据的输入输出操作

（一）数据的手动输入

建立一个新的 Excel 文件之后，便可进行数据的输入操作。Excel 中以单元格为单位进行数据的输入操作。一般用上下左右光标键、Tab 键或鼠标选中某一单元格，然后输入数据。

Excel 中的数据按类型不同通常可分为 4 类：数值型、字符型、日期型和逻辑型。Excel 根据输入数据的格式自动判断数据属于什么类型。如日期型的数据输入格式为“年/月/日”，“年－月－日”或“时：分：秒”；要输入逻辑型的数据，输入“true”（真）或“false”（假）即可；若数据由数字与小数点构成，Excel 自动将其识别为数字型，Excel 允许在数值型数据前加入货币符号，Excel 将其视为货币数值型，Excel 也允许数值型数据用科学记数法表示，如 2×10^9 在 Excel 中表示为 2E＋9。除了以上三种格式以外的数据，Excel 将其视为字符型处理。

（二）公式生成数据

Excel 的数据中也可由公式直接生成。例如：在当前工作表中 A1 和 B1 单元格中已输入了数值数据，欲将 A1 与 B1 单元格的数据相加的结果放入 C1 单元格中，可按如下步骤操作：用鼠标选定 C1 单元格，然后输入公式“＝A1＋B1”或输入“＝SUM（a1：b1）”，回车之后即可完成操作。C1 单元格此时存放的实际上是一个数学公式“A1＋B1”，因此 C1 单元格的数值将随着 A1、B1 单元格的数值的改变而变化。Excel 提供了完整的算术运算符，如＋（加）、－（减）、*（乘）、/（除）、%（百分比）、^（指数）和丰富的函数，如 SUM（求和）、CORREL（求相关系数）、STDEV（求标准差）等，供用户对数据执行各种形式的计算操作，在 Excel 帮助文件中可以查到各类算术运算符和函数的完整使用说明。本附录的后面整理出了 Excel 97 中所有统计函数的名称及其函数功能介绍，以供查阅。

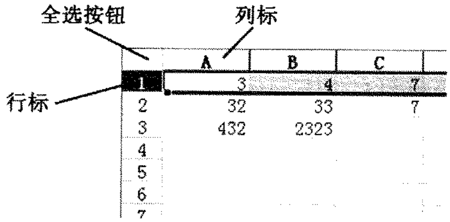
（三）复制生成数据

Excel 中的数据也可由复制生成。实际上，在生成的数据具有相同的规律性的时候，大部分的数据可以由复制生成。可以在不同单元格之间复制数据，也可以在不同工作表或不同工作簿之间复制数据；可以一次复制一个数据，也可同时复制一批数据，为数据输入带来了极大的方便。普通单元格的复制结果与公式单元格的复制结果相差较大，下面分别予以说明。

1．普通单元格指的是非公式的单元格。普通单元格的复制一般可以按如下步骤进行：

（1）拖动鼠标选定待复制的区域，选定之后该区域变为黑色。Excel 可以进行整行、整列或整个表格的选定操作，例如，如果要选定表格的第一列可直接用鼠标单击列标“A”，如果要选定表格的第一行可直接用鼠标单击行标“1”，如果要选定整个表格可直接点击全选按钮，如图附－2 所示。

（2）选定完区域之后，用鼠标右击该区域，在弹出的菜单中选择“复制”命令，将区域内容复制到粘贴版之中。可以发现该区域已被虚线包围。



图附－2

（3）用鼠标右击目标区域，在弹出的菜单中选择“粘贴”命令，则单元格区域的复制即告完成。

2．公式单元格的复制一般可分为两种，一种是值复制，一种是公式复制。值复制指的是只复制公式的计算结果到目标区域，公式复制指的是仅复制公式本身到目标区域。下面对它们的操作步骤分别予以说明。

（1）值复制：

①拖动鼠标选定待复制区域。

②用鼠标右击选定区域，选择“复制”选项。

③用鼠标右击目标区域，再单击“选择性粘贴”子菜单。出现复制选项，选定“数值”选项，然后单击“确定”按钮，则公式的值复制即告完成。

（2）公式复制：公式复制是 Excel 数据成批计算的重要操作方法，要熟练公式复制的操作首先要区分好两个概念：单元格的相对引用与绝对引用。Excel 中的公式一般都会引用到别的单元格的数值，如果你希望当公式复制到别的区域之时，公式引用单元格不会随之相对变动，那么你必须在公式中使用单元格的绝对引用。如果你希望当公式复制到别的区域之时，公式引用单元格也会随之相对变动，那么你必须在公式中使用单元格的相对引用。在公式中如果直接输入单元格的地址，那么默认的是相对引用单元格；如果在单元格的地址之前加入“＄”符号，那么意味着绝对引用单元格。例如，在当前工作表中 A1 和 B1 单元格中已输入了数值数据，用鼠标选定 C1 单元格，然后输入公式“＝A1＋B1”，此公式引用的便是两个相对的单元格 A1、B1，也就是说，如果将该公式复制到 C2 的单元格，公式所引用的单元格的地址将随着发生变化，公式将变为“＝A2＋B2”，如果将该公式复制到 F100 的单元格，那么公式将变为“＝D100＋E100”，这就是相对引用的结果，公式的内容随着公式的位置变化而相对变化。如果在 C1 单元格输入的是“＝＄A＄1＋＄B＄1”，那么此公式引用的便是绝对的单元格，不论将公式复制到何处，公式的内容都不会发生变化。当然，绝对引用和相对引用亦可在同一公式之中混合交叉使用，例如，如果在 C1 单元格中输入的是公式“＝A＄1＋B＄1”，那么意味着公式的内容不会随着公式的垂直移动而变动，而是随着公式的水平移动而变动，如果将该公式复制到 F100 单元格，那么公式将变为，“＝D＄1＋E＄1”。可以做这样的归纳：公式中“＄”符号后面的单元格坐标不会随着公式的移动而变动，而不带“＄”符号后面的单元格坐标则会随着公式的移动而变动。

在实际使用中，如果能把单元格的相对引用与绝对引用灵活应用到 Excel 的公式之中，能为数据成批准确运算带来极大的方便。

四、数据的移动操作

数据的移动操作可按如下步骤进行：

1. 拖动鼠标选定待移动区域。
2. 用鼠标右击选定区域，选择弹出菜单中“剪切”命令。
3. 用鼠标右击目标区域，选择弹出菜单中“粘贴”命令，则单元格区域的移动即告完成。

与数据的复制操作不同，公式单元格的移动操作不存在值移中公式移动的区别，也不存在绝对引用与相对引用的区别，移动操作将把公式单元格的公式内容原原本本地移动到目标区域，不作任何改动。

五、数据的删除操作

数据的删除操作可按如下步骤进行：

1. 拖动鼠标选定待删除区域。
2. 用鼠标右击选定区域，选择“删除”，即可删除单元格区域的内容。

如果不小心删除了不该删除的区域，可以通过“编辑”菜单的“撤销”命令来恢复被删除的内容。“撤销”操作是 Excel 中较常用到的操作，如果不小心实施了错误的操作，那么可以通过“撤销”操作使工作表恢复原样。如果不小心撤销了不应该撤销的操作，那么可以用“编辑”菜单的“重复”命令，使撤销操作重新执行。

六、与其他软件交换数据的方法

在 Excel 中可以打开其他类型的数据文件，如 FOXPRO 系列的 DBF 数据库文件、文本文件、Lotus 1－2－3 的数据文件等。具体操作方法如下：

1. 在“文件”菜单中选择“打开”子菜单。
2. 在“打开文件”对话框中选择所要打开的文件的类型及其所在的目录。
3. 用鼠标双击该文件名，并按 Excel 提示步骤操作即可打开该文件。

Excel 文件同样也可存为其他类型的数据文件，具体操作方法如下：

1. 编辑好文件后，在“文件”菜单中选择“另存为”子菜单。
2. 在“另存为”对话框中选择所要打开文件的类型及其所在的目录。
3. 输入文件名之后，用鼠标单击“保存”按钮即可。

需要注意的是，由于 Excel 工作簿文件由多张工作表构成，所以打开一个其他软件的数据文件之后的 Excel 工作簿仅由一个工作表构成；另一方面，将 Excel 文件存为其他格式的数据文件之时，一般仅对当前工作表有效。

以上介绍了 Excel 的一些比较主要的基本操作方法，在 Excel 中还有许多其他的基本操作，如表格显示格式控制、打印格式控制、Excel 帮助的使用等等，在应用 Excel 进行统计数据分析之前熟练这些操作是非常有必要的。

Excel 在描述统计中的应用

一、函数与分析工具

在利用 Excel 进行统计分析时，要经常使用到 Excel 中一些函数和数据分析工具。其中，函数是 Excel 预定义的内置公式，它可以接受被称为参数的特定数值，按函数的内置语法结构进行特定计算，最后返回一定的函数运算结果。例如，SUM 函数可对单元格或单元格区域执行相加运算。函数的语法以函数名称开始，后面分别是左圆括号、以逗号隔开的参数和右圆括号。参数可以是数字、文本、形如 TRUE 或 FALSE 的逻辑值、数组、形如♯N/A 的错误值，或单元格地址。给定的参数必须能产生有效的值。参数也可以是常量、公式或其他函数。

Excel 还提供了一组数据分析工具，称为“分析工具库”，在建立复杂的统计分析时，使用现成的数据分析工具可以节省很多时间。只需为每一个分析工具提供必要的数据和参数，该工具就会使用适宜的统计或数学函数在输出表格中显示相应的结果。其中的一些工具在生成输出表格时还能同时产生图表。要浏览已有的分析工具，可以单击“工具”菜单中的“数据分析”命令。如果“数据分析”命令没有出现在“工具”菜单上，则必须运行“安装”程序来加载“分析工具库”，安装完毕之后，再通过“工具”菜单中的“加载宏”命令，在“加载宏”对话框中选择并启动它。

二、描述统计工具

（一）简介

此分析工具用于对输入区域中数据的单变量分析，并提供数据趋中性和易变性等有关信息。

（二）操作步骤

1. 用鼠标点击工作表中待分析数据的任一单元格。

2. 选择“工具”菜单的“数据分析”子菜单，用鼠标双击数据分析工具中的“描述统计”选项。

3. 出现“描述统计”对话框，对话框内各选项的含义如下：

输入区域：在此输入待分析数据区域的单元格范围。一般情况下，Excel 会自动根据当前单元格确定待分析数据区域。

分组方式：如果需要指出输入区域中的数据是按行还是按列排列，则单击“行”或“列”。“描述统计”工具可以同时对多列或多行数据进行统计分析。

标志位于第一行/列：如果输入区域的第一行中包含标志项（变量名），则选中“标志位于第一行”复选框；如果输入区域的第一列中包含标志项，则选中“标志位于第一列”复选框；如果输入区域没有标志项，则不需要选择该复选框，Excel 将在输出表中生成适宜的数据标志。

输出区域：在此框中可填写输出结果表左上角单元格地址，用于控制输出结果的存放位置。整个输出结果分为两列，左边一列包含统计标志项，右边一列包含统计值。根据所选择

的“分组方式”选项不同，Excel将为输入表中的每一行或每一列生成一个两列的统计表。

新工作表：单击此选项，可在当前工作簿中插入新工作表，并由新工作表的A1单元格开始存放计算结果。如果需要给新工作表命名，则在右侧编辑框中键入名称。

新工作簿：单击此选项，可创建一新工作簿，并在新工作簿 工作表中存放计算结果。

汇总统计：指定输出表中生成下列统计结果，则选中此复选框。这些统计结果有：平均值、标准误差、中值、众数、标准偏差、方差、峰值、偏斜度、极差（全距）最小值、最大值、总和、样本个数。

均值置信度：若需要输出由样本均值推断总体均值的置信区间，则选中此复选框，然后在右侧的编辑框中输入所要使用的置信度。例如，若以置信度95%计算出的总体样本均值置信区间为10，则表示：在5%的显著水平下总体均值的置信区间为（$\bar{X}-10$，$\bar{X}+10$）。

在k个最大/小值：如果需要输出每个区域的数据的第k个最大或最小值，则选中此复选框。然后在右侧的编辑框中，输入k的数值。

4．填写完“描述统计”对话框之后，按“确定”按钮即可。

（三）结果说明

描述统计工具可生成以下统计指标，按从上到下的顺序包括样本的平均值（$\bar{X}$）、标准误差（$S/\sqrt{n}$）、组中值（Medium）、众数（Mode）、样本标准差（S）、样本方差（S^2）、峰度值、偏度值、极差（Max－Min）、最小值（Min）、最大值（Max）、样本总和、样本个数（n）和一定显著水平下总体均值的置信区间。

三、直方图工具

（一）简介

直方图工具用于计算数据的个别和累积频率，再根据有限集中某个数值元素的出现次数建立图表。例如：在一个有50名学生的班级里，可以通过直方图确定考试成绩的分布情况，它会给出考分出现在指定成绩区间的学生个数，而用户必须把存放分段区间的单元地址范围填写在直方图工具对话框中的“接收区域”框中。

（二）操作步骤

1．用鼠标点击表中待分析数据的任一单元格。

2．选择“工具”菜单的“数据分析”子菜单。用鼠标双击数据分析工具中的“直方图”选项。

3．出现“直方图”对话框，对话框内主要选项的含义如下：

输入区域：在此输入待分析数据区域的单元格范围。

接收区域（可选）：在此输入接收区域的单元格范围，该区域应包含一组可选的用来计算频数的边界值。这些值应当按升序排列。只要存在的话，Excel将统计在各个相邻边界值之间的数据出现的次数。如果省略此处的接收区域，Excel将在数据组的最小值和最大值之间创建一组平滑分布的接收区间。

标志：如果输入区域的第一行或第一列中包含标志项，则选中此复选框；如果输入区域没有标志项，则清除此该复选框，Excel将在输出表中生成适宜的数据标志。

输出区域：在此输入结果输出表的左上角单元格的地址，用于控制计算结果的显示位置。如果输出表将覆盖已有的数据，Excel会自动确定输出区域的大小并显示信息。

柏拉图：选中此复选框，可以在输出表中同时显示按降序排列频率数据。如果此复选框被清除，Excel 将只按序来排列数据。

累积百分比：选中此复选框，可以在输出结果中添加一列累积百分比数值，并同时在直方图表中添加累积百分比折线。如果清除此选则会省略此结果。

图表输出：选中此复选框，可以在输出表中同时生成一个嵌入式直方图表。

4. 按需要填写完“直方图”对话框之后，按“确定”按钮即可。

（三）结果说明

完整的结果包括三列数据和一个频率分布图，第一列是数值的区间范围，第二列是数值分布的频数，第三列是频数分布的累积百分比。

四、利用 Excel 绘制散点图

（一）简介

散点图是观察两个变量之间关系程度最为直观的工具之一，利用 Excel 的图表向导，可以非常方便地创建并且改进一个散点图，也可以在一个图表中同时显示两个以上变量之间的散点图。

（二）操作步骤

如图附 - 3 所示数据，可按如下步骤建立变量 $x-y$，$x-z$ 的散点图：

	A	B	C
1	x	y	z
2	68	68	312
3	71	69	323
4	72	70	345
5	70	81	366
6	76	85	378
7	77	86	390
8	76	100	411
9	78	108	434
10	79	114	449
11	81	120	469
12	88	133	480

图附 - 3

1. 拖动鼠标选定数值区域 A2：C12，不包括数据上面的标志项。

2. 选择“插入”菜单的“图表”子菜单，进入图表向导。

3. 选择“图表类型”为“散点图”，然后单击“下一步”。

4. 确定用于制作图表的数据区。Excel 将自动把第 1 步所选定的数据区的地址放入图表数据区内。

5. 在此例之中，需要建立两个系列的散点图，一个是 $x-y$ 系列的散点图，一个是 $x-z$ 系列的散点图，因此，必须单击“系列”标签，确认系列 1 的“x 值”方框与“数值方框”分别输入了 x，y 数值的范围，在系列 2 的“x 值”方框与“数值方框”分别输入了 x，z 数值的范围。在此例中，这些都是 Excel 已经默认的范围，所以，通常情况下，直接单击“下一步”即可。

6. 填写图表标题为“$x-y$ 与 $x-z$ 散点图”，x 轴坐标名称为“x”，y 轴与 z 轴坐标

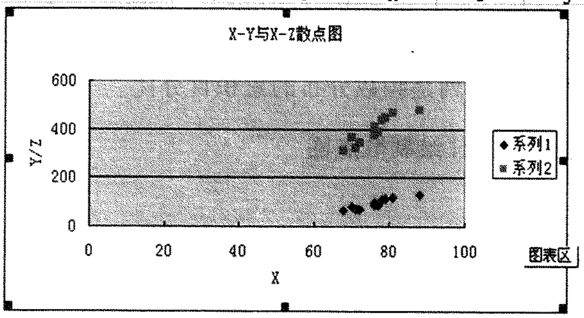
名称“y/z”，然后单击“下一步”。

7. 选择图表输出的位置，然后单击“完成”按钮即生成图附－4的图表。

（三）结果说明

如图附－4所示，Excel中可同时生成两个序列的散点图，并分为两种颜色显示。通过散点图可观察出两个变量的关系，为变量之间建立数学模型做准备。

	A	B	C
1	x	y	z
2	68	68	312
3	71	69	323
4	72	70	345
5	70	81	366
6	76	85	378
7	77	86	390
8	76	100	411
9	78	108	434
10	79	114	449
11	81	120	469
12	88	133	480



图附－4

五、数据透视率工具

（一）简介

数据透视表是Excel中强有力的数据列表分析工具。它不仅可以用来作单变量数据的次数分布或总和分析，还可以用来作双变量数据的交叉频数分析、总和分析和其他统计量的分析。

（二）操作步骤

如图附－5所示，表中列出学生两门功课评定结果，可按如下步骤建立交叉频数表：

	A	B	C
1	学号	语文	数学
2	1001	优	差
3	1002	良	中
4	1003	中	中
5	1004	差	中
6	1005	差	差
7	1006	中	良
8	1007	中	优
9	1008	差	良
10	1009	良	中

图附－5

1. 选中图附－5中表格中有数据的任一单元格，然后选择“数据”菜单的“数据透视表”子菜单，进入数据透视表向导。

2. 选择“Microsoft Excel数据清单或数据库”为数据源。单击“下一步”。

3. 选择待分析的数据的区域。一般情况下Excel会自动根据当前单元格确定待分析数据区域，因此只要直接单击“下一步”按钮即可。

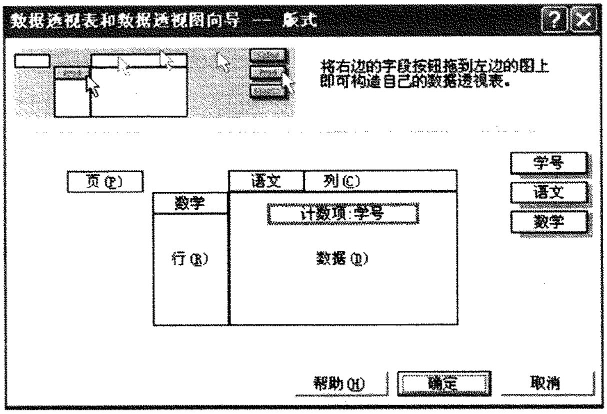
4. 确定数据透视表的结构。在此例中，要建立的是一个交叉频数表，分别按语文和数

学的成绩对学生的人数进行交叉频数分析，因此可按图附－6 将三个按钮“学号”、“语文”、“数学”分别拖放到表格的指定部位，并且双击“求和项：学号”，将其改为记数项，结果如图附－6 所示，然后单击“下一步”按钮。

5. 选择数据透视表的显示位置之后，单击“完成”按钮，可出现如图附－7 所示的数据透视表。

（三）结果说明

如图附－7 的结果所示，数据透视表可以作为一个交叉频数分析工具。完成数据透视表之后，可按需要修改数据表的显示格式。例如，如果想要把表格中的频数替换成为百分比数，可以用鼠标右击频数的任一单元格，选择“字段”子菜单，单击“选项”按钮，将“数据显示方式”替换成为“占总和的百分比”，然后单击“确定”按钮即可。按同样方式，可将数据透视表修改成为其他不同样式。



图附－6

	A	B	C	D	E	F
1	计数项:学号	语文				
2	数学	差	良	优	中	总计
3	差	1		1		2
4	良	1			1	2
5	优				1	1
6	中	1	2		1	4
7	总计	3	2	1	3	9

图附－7

六、排位与百分比工具

（一）简介

此分析工具可以产生一个数据列表，在其中罗列给定数据集中各个数值的大小次序排位和相应的百分比排位，用来分析数据集中各数值间的相互位置关系。

（二）操作步骤

1. 用鼠标点击表中待分析数据的任一单元格。

2. 选择“工具”菜单的“数据分析”子菜单，用鼠标双击数据分析工具中的“排位与百分比”选项。

3. 填写完“排位与百分比”对话框，单击“确定”按钮即可。

（三）结果说明

输出的结果可分为四列：第一列“点”是数值原来的存放位置；第二列是相应的数值；第三列是数值的序号；第四列是数值的百分比排位，它的计算方法是，小于该数值的数值个数/（数值总个数－1）。

Excel 在推断统计中的应用

Excel 在推断统计中也有广泛的应用。限于篇幅，这里只介绍如何利用 Excel 实现本教材所涉及的有关内容。

一、二项分布工具

（一）简介

在 Excel 中想要计算二项分布的概率值、累积概率，需要利用 Excel 的工作表函数 BINOMDIST。函数 BINOMDIST 适用于固定次数的独立实验，实验的结果只包含成功或失败两种情况，且每次实验成功的概率固定不变。例如，已知次品概率的情况下，函数 BINOMDIST可以计算抽查 10 个样品中发现 2 个次品的概率。以下例子说明如何在 Excel 中计算二项分布的概率值，以及如何进一步建立二项分布图表。

（二）操作步骤

例如，一个推销员打了六个电话，推销成功的概率是 0.3，那么可以按以下步骤建立推销成功次数的概率分布图表。

1. 如图附－8 所示，先在 Excel 之下建立概率分布表格的框架。

	A	B	C	D	E	F
1	二项分布概率分布表					
2	试验总次数	6				
3	每次成功概率	0.3				
4						
5				概率		
6	成功次数(k)	P(Y=k)	P(Y<=k)	P(Y<k)	P(Y>k)	P(Y>=k)
7	0					
8	1					
9	2					
10	3					
11	4					
12	5					
13	6					

图附－8

2. 如图附－9 所示，先在 B7 至 F7 单元格分别输入概率计算公式。

3. 公式的拷贝。选取 B7 至 F7 单元格，然后移动鼠标至 F7 单元格的右下角，使其成为黑色实心十字星状，一般称之为“填充柄”，拖动“填充柄”至 F13 单元格即可完成公式

的拷贝操作。结果如图附－10 所示。

	A	B	C	D	E	F
1	二项分布概率分布表					
2	试验总次数	6				
3	每次成功概率	0.3				
4						
5			概率			
6	成功次数(k)	P(Y=k)	P(Y<=k)	P(Y<k)	P(Y>k)	P(Y>=k)
7	0	=BINOMDIST(A7,6,0.3,0)	=BINOMDIST(A7,6,0.3,1)	=C7-B7	=1-C7	=1-D7
8	1					
9	2					
10	3					
11	4					
12	5					
13	6					

图附－9

	A	B	C	D	E	F
1	二项分布概率分布表					
2	试验总次数	6				
3	每次成功概率	0.3				
4						
5				概率		
6	成功次数(k)	P(Y=k)	P(Y<=k)	P(Y<k)	P(Y>k)	P(Y>=k)
7	0	0.117649	0.117649	0	0.88235	1
8	1	0.302526	0.420175	0.11765	0.57983	0.88235
9	2	0.324135	0.74431	0.42018	0.25569	0.57983
10	3	0.18522	0.92953	0.74431	0.07047	0.25569
11	4	0.059535	0.989065	0.92953	0.01094	0.07047
12	5	0.010206	0.999271	0.98906	0.00073	0.01094
13	6	0.000729	1	0.99927	0	0.00073

图附－10

4．下面开始创建二项分布图表。选取 B7 至 B13 单元格，选取“插入”菜单的“图表”子菜单。

5．选择“柱状图”，然后单击“下一步”。

6．单击“系列”标签，单击“分类（X）轴标志”框，并用鼠标选取 A7 至 A13 单元格为图表 X 轴的轴标，然后单击“下一步”。

7．分别键入图表名称“二项分布图”，X 轴名称“成功次数”，Y 轴名称“成功概率”，单击“完成”按钮即可生成二项分布图表。

（三）结果说明

如图附－10 所示，利用 Excel 的 BINOMDIST 的函数可以计算出二项分布的概率以及累积概率。BINOMDIST 函数可以带四个参数，各参数的含义分别是：实验成功的次数，实验的总次数，每次实验中成功的概率，是否计算累积概率。第四个参数是一个逻辑值，如果为 TRUE，函数 BINOMDIST 计算累积分布函数概率值；如果为 FALSE，计算概率密度函数概率值。

二、其他几种主要分布的函数

（一）函数 CRITBINOM

1．说明：函数 CRITBINOM 可称为 BINOMDIST 的逆向函数，它计算出使累积二项式分布概率 P（$X<=x$）大于等于临界概率值的最小值。

2．语法：CRITBINOM（trials，probability _ s，alpha）

trials：贝努利实验次数；

probability - s：一次试验中成功的概率；

alpha：临界概率

3．举例：CRITBINOM（6，0.5，0.75）等于 4，表明如果每次试验成功的概率为 0.5，那么 6 次试验中成功的次数小于等于 4 的概率恰好超过或等于 0.75。

（二）函数 HYPGEOMDIST

1．说明：函数 HYPGEOMDIST 计算超几何分布。给定样本容量、总体容量和样本总体中成功的次数，函数 HYPGEOMDIST 计算出样本取得给定成功次数的概率。使用该函数可以解决有限总体的问题，其中每个观察值只有两种取值，或者为成功或者失败，且给定样本区间的所有子集有相等的发生概率。

2．语法：HYPGEOMDIST（sample _ s，number _ sample，population _ s，number _ population）

sample _ s：样本中成功的次数；

number _ sample：样本容量；

probability _ s：样本总体中成功的次数；

number _ population：样本总体的容量。

3．举例：容器里有 20 块巧克力，8 块是焦糖的，其余 12 块是果仁的。如果从中随机选出 4 块，下面函数计算计算出只有一块是焦糖巧克力的概率：HYPGEOMDIST（1，4，8，20）=0.363 261。

（三）函数 POISSON

1．说明：函数 POISSON 计算泊松分布。泊松分布通常用于预测一段时间内事件发生指定次数的概率，比如一分钟内通过收费站的轿车的数量为 n 的概率。

2．语法：POISSON（x，mean，cumulative）

x：事件数；

mean：期望值；

cumulative：为一逻辑值，确定计算出的概率分布形式。

如果 cumulative 为 TRUE，函数 POISSON 计算出累积分布函数概率值，即，随机事件发生的次数在 0 与 x 之间（包含 0 和 1）；如果为 FALSE，则计算概率密度函数，即，随机事件发生的次数恰好为 x。

3．举例：POISSON（2，5，FALSE）=0.084 224 表明，若某一收费站每分钟通过的轿车平均数量为 5 辆，那么某一分钟通过 2 辆的概率为 0.084 224。

（四）正态分布函数 NORMDIST

1．说明：正态分布在模拟现实世界过程和描述随机样本平均值的不确定度时有广泛的

用途。函数 NORMDIST 计算给定平均值和标准偏差的正态分布的累积函数概率值。同样可以用类似（五）中的方法，利用 NORMDIST 函数建立正态分布密度函数图，这里不再赘述。

2．语法：NORMDIST（x，mean，standard _ dev，cumulative）

x：需要计算其分布的数值；

mean：分布的算术平均值；

standard _ dev：分布的标准偏差；

cumulative：逻辑值，指明函数的形式。

如果 cumulative 为 TRUE，函数 NORMDIST 计算累积分布函数；如果为 FALSE，计算概率密度函数。

3．举例：公式 NORMDIST（6，5，2，0）计算出平均值为 5、标准差为 2 的正态函数，当 $x=6$ 时概率密度函数的数值；公式 NORMDIST（60，50，4，1）计算出平均值为 50、标准差为 4 的正态分布函数，当 $x=60$ 时累积分布函数的数值。

（五）函数 NORMSDIST

1．说明：函数 NORMSDIST 计算标准正态分布的累积函数。

2．语法：NORMSDIST（z）

z：为需要计算其分布的数值。

3．举例：NORMSDIST（0）=0.5，表明若 x 服从标准正态分布，那么 $x<0$ 的概率为 50%。

（六）函数 NORMSINV

1．说明：函数 NORMSINV 计算标准正态分布累积函数的逆函数。

2．语法：NORMSINV（probability）

probability：正态分布的概率值。

3．举例：NORMSINV（0.5）=0

（七）t 分布函数 TDIST

1．说明：函数 TDIST 计算 student 的 t 分布数值。t 分布用于小样本数据集合的假设检验。使用此函数可以代替 t 分布的临界值表。

2．语法：TDIST（x，degrees _ freedom，tails）

x：为需要计算分布的数字；

degrees _ freedom：表示自由度的整数；

tails：指明计算的分布函数是单尾分布还是双尾分布。

如果 tails=1，函数 TDIST 计算单尾分布；如果 tails=2，函数 TDIST 计算双尾分布。

3．举例：TDIST（1.96，60，2）=0.054 645

三、随机抽样工具

（一）简介

Excel 中的 RAND（）函数可以产生大于等于 0 小于 1 的均匀分布随机数，RAND（）不带任何参数运行，每次计算时都将产生一个新的随机数，如果将 RAND（）函数从一个单元格复制或移动到另外一个单元格，RAND（）函数也将重新计算一个新的数值。RAND（）函数可

以被用来作为不重复抽样调查的工具。

（二）操作步骤

如图附－11所示，10个象征性的样本数据，欲从中随机抽取5个数据，可按如下步骤操作：

	A
1	No
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	7
9	8
10	9
11	10

图附－11

1. 选择B2单元格，输入公式“=RAND（）”并回车。

2. 拖动B2单元格右下角的填充柄至B11单元格，并在B1单元格输入列标志名称“random”。

3. 选取单元格B2至B11，右击选中的区域选择“复制”，再次右击选中的区域，选择“选择性粘贴”，单击选项“数值”后，点击“确定”按钮，此时B2：B11单元格是10个稳定的随机数。

4. 选取单元格B2至B11单元格，选择“数据”菜单项下的排序子菜单。

5. 选取“RANDOM”为主要关键字，然后点击“确定”按钮。排序结果如图附－12所示，可以用A2至A6单元格的样本作为随机抽取的5个样本。

	A	B
1	No	random
2	8	0.217822
3	6	0.405793
4	9	0.444021
5	7	0.509012
6	4	0.55824
7	1	0.577226
8	5	0.68997
9	2	0.732066
10	3	0.827141
11	10	0.939147

图附－12

（三）结果说明

1. 以上进行的是不重复随机抽样，可以用类似的方法，利用Excel的RANDBETWEEN（TOP，BOTTOM）函数实现总体的重复随机抽样。RANDBETWEEN（TOP，BOTTOM）函数可随机产生介于TOP与BOTTOM之间的随机整数，抽取此整数对应编号的样本可作为总体的重复随机抽样的结果。

2. RAND（）函数产生的是 0 与 1 之间均匀的随机数，利用数据分析工具中的随机数发生器，可以生成用户指定类型分布的随机数。例如 0－1 正态分布的随机数、泊松分布的随机数等。

3. Excel 易于产生各类型随机数，可以用类似的方法进行随机数字模拟试验与随机游走模拟试验。

四、样本推断总体

（一）简介

利用 Excel 的几个函数，如求平均函数 AVERAGE、标准差函数 STDEV、t 分布函数 TINV 等的组合使用可以构造出一个专门用于实现样本推断总体的 Excel 工作表。以下例子先计算样本的平均数和标准差，然后在一定置信水平上估计总体均值的区间范围。

（二）操作步骤

1. 构造工作表。如图附－13 所示，首先在各个单元输入以下的内容，其中左边是变量名，右边是相应的计算公式。

2. 将 A 列的名称定义成为 B 列各个公式计算结果的变量多。选定 A4:B6，A8:B8 和 A10:B15 单元格（先用鼠标选择第一部分，再按住 CTRL 键选取另外两个部分），选择“插入”菜单的“名称”子菜单的“指定”选项，用鼠标点击“最左列”选项，然后点击“确定”按钮即可。

3. 输入样本数据，和用户指定的置信水平 0.95，如图附－13 所示。为样本数据命名。选定 D1:D11 单元格，选择“插入”菜单的“名称”子菜单的“指定”选项，用鼠标点击“首行”选项，然后点击“确定”按钮，最后得到图附－14 所示的计算结果。

	A	B
1	以样本均值推断总体均值的置信区间	
2		
3	样本统计量	
4	样本个数	=COUNT(样本数据)
5	样本均值	=AVERAGE(样本数据)
6	样本标准差	=STDEV(样本数据)
7	用户输入	
8	置信水平	0.95
9	计算结果	
10	抽样标准误	='样本标准差'/SQRT('样本个数')
11	自由度	='样本个数'-1
12	t值	=TINV(1-'置信水平', '自由度')
13	置信区间半径	='t值'*'抽样标准误'
14	置信区间上界	='样本均值'-'置信区间半径'
15	置信区间下界	='样本均值'+'置信区间半径'

图附－13

（三）结果说明

以上例子说明如何交叉组合使用 Excel 的公式和函数，以构造出一个能实现样本推断总体有关计算的 Excel 工作表。实际上，在用 Excel 进行数据统计处理之时，许多统计功能可以使用上例类似的方法，通过组合使用 Excel 的各类统计函数和公式加以实现。

	A	B	C	D
1	以样本均值推断总体均值的置信区间			样本数据
2				28.5
3	样本统计量			26.4
4	样本个数	10		33.5
5	样本均值	31.4		34.3
6	样本标准差	2.814249456		35.9
7	用户输入			29.6
8	置信水平	0.95		31.3
9	计算结果			31.1
10	抽样标准误	0.889943818		30.9
11	自由度	9		32.5
12	t值	2.262158887		
13	置信区间半径	2.013194318		
14	置信区间上界	29.38680568		
15	置信区间下界	33.41319432		

图附－14

五、假设检验

（一）简介

假设检验是统计推断中的重要内容。以下例子利用 Excel 的正态分布函数 NORMSDIST、判断函数 IF 等，构造一张能够实现在总体方差已知情况下进行总体均值假设检验的 Excel 工作表。

（二）操作步骤

1. 构造工作表。如图附－15 所示，首先在各个单元格输入以下的内容，其中左边是变量名，右边是相应的计算公式。

2. 将 A 列的名称定义成为 B 列各个公式计算结果的变量名。选定 A3:B4，A6:B8，A10:A11，A13:A15 和 A17:B19 单元格，选择“插入”菜单的“名称”子菜单的“指定”选项，用鼠标点击“最左列”选项，然后点击“确定”按钮即可。

3. 输入样本数据，以及总体标准差、总体均值假设、置信水平数据。如图附－16 所示。

4. 为样本数据指定名称。选用 C1:C11 单元格，选择“插入”菜单的“名称”子菜单的“指定”选项，用鼠标点击“首行”选项，然后点击“确定”按钮，最后得到如图附－16 中所示的计算结果。

（三）结果说明

如图附－16 所示，该例子的检验结果不论是单侧还是双侧均为拒绝 H_0 假设。所以，根据样本的计算结果，在 5%的显著水平之下拒绝总体均值为 35 的假设。同时由单侧显著水平的计算结果还可以看出：在总体均值是 35 的假设之下，样本均值小于等于 31.4 的概率仅为 0.020 303 562＜0.05，小概率事件居然发生，所以，同样得出在 5%的显著水平下拒绝总体均值为 35 的假设的结论。

	A	B
1	总体均值的假设检验	
2	样本统计量	=COUNT(样本数据)
3	样本个数	=AVERAGE(样本数据)
4	样本均值	
5	用户输入	
6	总体标准差	
7	总体均值假设值	
8	置信水平	
9	计算结果	
10	抽样标准误	='总体标准差' /SQRT('样本个数')
11	计算Z值	=('样本均值' -'总体均值假设值')/'抽样标准误'
12	单侧检验	
13	单侧Z值	=NORMSINV(1-'置信水平')
14	检验结果	=IF(ABS('计算Z值')>ABS('单侧Z值'), "拒绝H₀", "接收H₀")
15	单侧显著水平	=1-NORMSDIST(ABS('计算Z值'))
16	双侧检验	
17	双侧Z值	=NORMSINV((1-'置信水平')/2)
18	检验结果	=IF(ABS('计算Z值')>ABS('双侧Z值'), "拒绝H₀", "接收H₀")
19	双侧显著水平	=IF('计算Z值'>0,2*(1-NORMSDIST('计算Z值')), 2*NORMSDIST('计算Z值'))

图附 - 15

	A	B	C
1	总体均值的假设检验		样本数据
2	样本统计量		28.5
3	样本个数	10	26.4
4	样本均值	31.4	33.5
5	用户输入		34.3
6	总体标准差	5.56	35.9
7	总体均值假设值	35	29.6
8	置信水平	0.95	31.3
9	计算结果		31.1
10	抽样标准误	1.758226379	30.9
11	计算Z值	-2.047517909	32.5
12	单侧检验		
13	单侧Z值	-1.644853	
14	检验结果	拒绝H₀	
15	单侧显著水平	0.020303562	
16	双侧检验		
17	双侧Z值	-1.959961082	
18	检验结果	拒绝H₀	
19	双侧显著水平	0.040607125	

图附 - 16

六、单因素方差分析

（一）简介

单因素方差分析可用于检验两个或两个以上的总体均值相等的假设是否成立。此方法是双双均值检验（如 t 检验）的扩充。该检验假定总体是服从正态分布的，总体方差是相等

的，并且随机样本是独立的。这种工具适用于完全随机化试验的结果分析。如图附－17 表中所示，一产品制造商雇佣销售人员向销售商打电话，制造商想比较四种不同电话频率计划的效率，他从销售人员中随机选出 32 名，将他们随机分配到 4 种计划中，在一段时期内记录他们的销售情况并在表中列出。试问其中是否有一种计划会带来较高的销售水平。

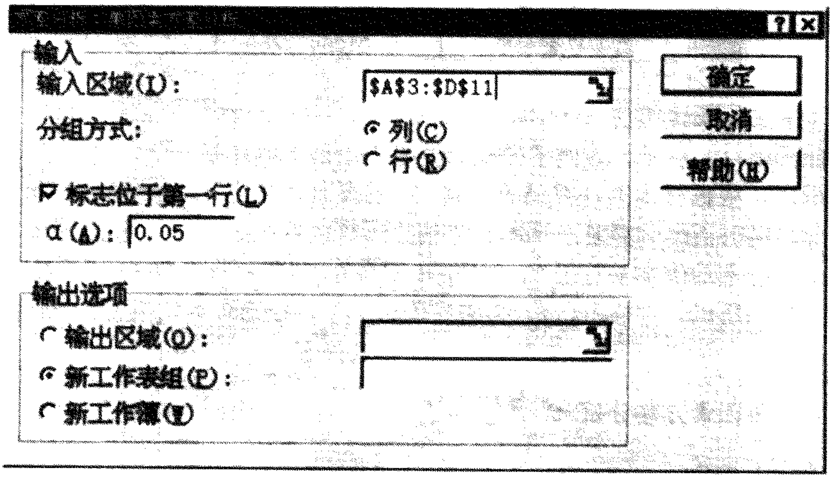
	A	B	C	D
1	单因素方差分析			
2				
3	计划1	计划2	计划3	计划4
4	36	39	44	31
5	40	45	43	43
6	32	54	38	46
7	44	53	40	43
8	35	46	41	36
9	41	42	35	49
10	44	35	37	46
11	42	39	37	48

图附－17

（二）操作步骤

1. 选择“工具”菜单的“数据分析”子菜单，双击“方差分析：单因素方差分析”选项，弹出单因素方差分析对话框。

2. 按图附－18 所示方式填写对话框。然后单击“确定”按钮即可。



图附－18

（三）结果说明

按照如上的操作步骤即可得到图附－19 的计算结果。其中表格的第二部分则是方差分析的结果。SS 列分别给出了四个分组的组间方差、组内方差以及总方差；DF 列分别给出了对应方差的自由度，MS 列是平均值方差，由 SS 除以 DF 得到，它是总体方差的两个估计值；F 列是 F 统计量的计算结果，如果四个总体均值相等的假设成立，它应该服从 F 分布，即近似为 1，它是最终的计算结果，将它与一定置信水平下的 F 临界值 F crit 比较，可以判

断均值相等的假设是否成立，在本例中，1.677 61<2.946 68，所以不能拒绝四个总体均值相等的假设；P－value 列是单尾概率值，表明如果四个总体均值相等的假设成立，得到如上样本结果的概率是 19.442%，即得到以上样本并不是小概率事件，同样也得到不能拒绝四个总体均值相等的假设的结论。

	A	B	C	D	E	F	G
1	方差分析：单因素方差分析						
2							
3	SUMMARY						
4	组	计数	求和	平均	方差		
5	计划1	8	314	39.25	19.6429		
6	计划2	8	353	44.125	45.8393		
7	计划3	8	315	39.375	9.98214		
8	计划4	8	342	42.75	38.7857		
9							
10							
11	方差分析						
12	差异源	SS	df	MS	F	P-value	F crit
13	组间	143.75	3	47.9167	1.67761	0.19442	2.94668
14	组内	799.75	28	28.5625			
15							
16	总计	943.5	31				

图附－19

按相似方法可进行无重复双因素方差分析和有重复双因素方差分析。

七、线性回归分析

（一）简介

线性回归分析通过使用“最小二乘法”对样本数据进行直线拟合，用于分析单个因变量是如何受一个或几个自变量影响的。如图附－20 所示，表中是我国 1987 年至 1997 年的布匹人均产量和人均纱产量，试用线性回归分析的方法分析两组数据之间的关系。

（二）操作步骤

1. 选择“工具”菜单的“数据分析”子菜单，双击“回归”选项，弹出回归分析对话框。对话框主要选项的含义如下：*Y* 值输入区域，在此输入因变量数据区域，该区域必须由单列数据组成；*X* 值输入区域，在此输入自变量数据区域，自变量的个数最多为 16；置信度，如果需要在汇总输出表中包含附加的置信度信息，则选中此复选框，然后在右侧的编辑框中，输入所要使用的置信度，95%为默认值；常数为零，如果要强制回归线通过原点，则选中此复选框；输出区域，在此输入输出表左上角单元格的地址，用于控制计算结果的输出位置。汇总输出表至少需要有七列的宽度，包含的内容有 anova 表、系数、*y* 估计值的标准误差、r^2 值、观察值个数，以及系数的标准误差；新工作表，单击此选项，可在当前工作簿中插入新工作表，并由新工作表的 A1 单元格开始显示计算结果，如果需要给新工作表命名，则在右侧的编辑框中键入名称；新工作簿，单击此选项，可创建一新工作簿，并在新工作簿中的新工作表中显示计算结果；残差，如果需要以残差输出表的形式查看残差，则选中此复选框；标准残差，如果需要在残差输出表中包含标准残差，则选中此复选框；残差图，如果需要生成一张图表，绘制每个自变量及其残差，则选中此复选框；线形拟合图，如

果需要为预测值和观察值生成一个图表，则选中此复选框；正态概率图，如果需要绘制正态概率图，则选中此复选框。

2. 按如下方式填写对话框：X 值输入区域为 $B$1:$B$12，Y 值输入区域为 $C$1:$C$12，并选择“标志”和“线性拟合图”两个复选框，然后单击“确定”按钮即可。

	A	B	C
1	年份	人均布产量(米)	人均纱产量(公斤)
2	1987	15.96	4.03
3	1988	17.06	4.23
4	1989	16.92	4.26
5	1990	16.63	4.07
6	1991	15.79	4
7	1992	16.37	4.31
8	1993	17.23	4.26
9	1994	17.73	4.11
10	1995	21.59	4.5
11	1996	17.17	4.21
12	1997	20.23	4.55

图附－20

（三）结果说明

按照如上的操作步骤即可得到图附－21 的计算结果。结果可以分为四个部分，第一部分是回归统计的结果，包括多元相关系数、可决系数 R^2、调整之后的相关系数、回归标准差以及样本个数。第二部分是方差分析的结果，包括可解释的离差、残差、总离差和它们的自由度以及由此计算出的 F 统计量和相应的显著水平。第三部分是回归方程的截距和斜率的估计值以及它们的估计标准误差、t 统计量大小双边拖尾概率值，以及估计值的上下界。根据这部分的结果可知回归方程为 $Y=8.46433X-18.288$。第四部分是样本散点图，其中蓝色的点是样本的真实散点图，红色的点是根据回归方程进行样本历史模拟的散点。如果觉得散点图不够清晰可以用鼠标拖动图形的边界达到控制图形大小的目的。用相同的方法可以进行多元线性方程的参数估计，还可以在自变量中引入虚拟变量以增加方程的拟合程度。对于非线性的方程的参数估计，可以在进行样本数据的线性化处理之后，再按以上步骤进行参数估计。

八、相关系数分析

（一）简介

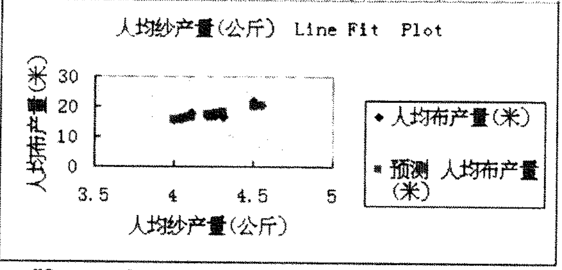
使用“相关系数”分析工具来确定两个区域中数据的变化是否相关，即一个集合的较大数据是否与另一个集合的较大数据相对应（正相关）；或者一个集合的较小数据是否与另一个集合的较小数据相对应（负相关）；还是两个集合中的数据互不相关（相关性为零）。

（二）操作步骤

采用图附－3 中的数据，可按如下步骤计算变量 x，y，z 之间的相关系数。

1. 用鼠标点击表中待分析数据的任一单元格。

2. 选择“工具”菜单的“数据分析”子菜单，用鼠标双击数据分析工具中的“相关系数”选项。



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	MARY OUTPUT								
2									
3	回归统计								
4	ultiple	0.83863							
5	R Square	0.7033							
6	sted R Sc	0.67033							
7	标准误差	1.03146							
8	观测值	11							
9									
10	方差分析								
11		df	SS	MS	F	nificance F			
12	回归分析	1	22.6971	22.6971	21.3338	0.00126			
13	残差	9	9.57515	1.06391					
14	总计	10	32.2723						
15									
16		Coefficien	标准误差	t Stat	P-value	.ower 95%	Jpper 95%	下限 95.0'	上限 95.0%
17	Intercept	-18.288	7.75798	-2.3573	0.04279	-35.838	-0.738	-35.838	-0.737975
18	纱产量(公	8.46433	1.83256	4.61885	0.00126	4.31878	12.6099	4.31878	12.6098802

图附－21

3. 填写完“相关系数”对话框，单击“确定”按钮即可得到各个变量的相关系数矩阵，结果如图附－22 所示。

	A	B	C	D
1		x	y	z
2	x	1		
3	y	0.929167	1	
4	z	0.922982	0.984245	1

图附－22

（三）结果说明

以上下三角矩阵计算出三个变量 x，y，z 两两之间的相关系数，如变量 x，y 之间的相关系数为 0.929 167，所以可以判断 x，y 之间存在着较高的正线性相关关系。

九、季节变动时间序列的分解分析

（一）简介

分解分析法是时间序列分析和预测过程中常用的统计方法。该方法假设时间序列是趋势变动（T）、循环变动（C）、随机变动（I）综合影响的结果，分解过程首先从原始序列中消除随机变动，然后在此基础上分别识别出循环变动和趋势变动的变化模式。假设的合理性、方法的科学性和操作的简易性使分解分析法在经济预测中得到了较为广泛的应用。下面结合具体例子介绍在 Excel 中如何实现时间序列的分解分析。如图附－23 所示，表中 A1 至 B13 单元格是 1996～1998 年各季度某海滨城市旅游人口数（千人），试预测 1999 年各季度旅游人口数。

（二）操作步骤

1. 计算一次移动平均，消除随机波动。在 C3 单元格填入公式“= AVERAGE（B2:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	季度	旅游人数	一次移动平均	中心化移动平均	季节指数	平均季节指数	调整季节指数	消除季节变动	时间
2	1996.1	77					0.670588435	114.8245272	1
3	1996.2	155	148.75				0.872016265	131.8782741	2
4	1996.3	298	157.75	153.25	1.94454	1.860272838	1.820272369	163.7117637	3
5	1996.4	105	168.75	163.25	0.64319	0.651123701	0.637122931	164.8033605	4
6	1997.1	113	178	173.375	0.65177	0.68532461	0.670588435	168.5087217	5
7	1997.2	159	184.25	181.125	0.87785	0.891178814	0.872016265	182.3360486	6
8	1997.3	335	193	188.625	1.77601		1.820272369	184.0383921	7
9	1997.4	130	201.5	197.25	0.65906		0.637122931	204.0422558	8
10	1998.1	148	210.25	205.875	0.71888		0.670588435	220.7016887	9
11	1998.2	193	216.5	213.375	0.90451		0.872016265	221.326147	10
12	1998.3	370					1.820272369	203.2662838	11
13	1998.4	155					0.637122931	243.2811512	12
14	1999.1								13
15	1999.2								14
16	1999.3								15
17	1999.4								16

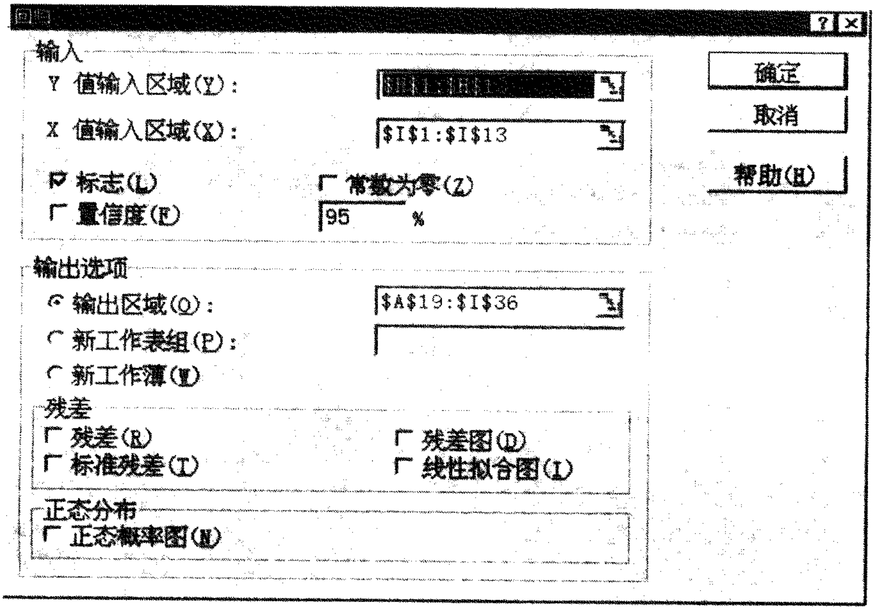
图附－23

B5)”，然后用“填充柄”将公式复制到C4:C11 单元格。

2．中心化移动平均数。在 D4 单元格输入公式“＝AVERAGE（C3:C4)”，再用“填充柄”将公式复制到D5:D11 单元格。

3．计算季节指数。在 E4 单元格输入公式“＝B4/D4”，然后用“填充柄”将公式复制到E5:E11 单元格。

4．计算平均季节指数。在 F4 单元格中输入公式“＝AVERAGE（E4，E8)”，然后用“填充柄”将公式复制到F5:F7 单元格。



图附－24

5．计算调整后的季节指数。为了让季节指数的总平均为 1，必须对季节指数加以调整。先在 G4 单元格中输入公式“=F4/AVERAGE（$F$4:$F$7)”，再用“填充柄”将公式复制到G5:G7 单元格。此时，G4:G7 就是最终计算出的四个标准化之后季节指数，它反映的是原始时间序列中的循环变动。然后，根据G4:G7 单元格数值，将四个季节指数分别填充到G2:G13 的其他对应季节的空白单元格内，供下一步计算使用。

6．消除旅游人数序列中的季节变动。在 H2 单元格中输入公式“=B2/G2”，然后将公式复制到H3:H13 单元格。此时，H 列就是消除季节变动之后的旅游人数时间序列。

7．对消除季节变动的旅游人数进行回归分析。在 I 列填入时间序号 1 至 15，选择“工具”菜单的“数据分析”子菜单，双击“回归”选项，弹出回归分析对话框。按图附－24 所示的方式填写对话框。然后单击“确定”按钮，即可得到剔除了季节波动的时间序列的线性趋势模型。线性模型估计结果如图附－25 所示，其中 B35 单元格是线性趋势模型的截距，B36 单元格是斜率。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
19	SUMMARY OUTPUT								
20									
21	回归统计								
22	Multiple	0.95448							
23	R Square	0.91103							
24	Adjusted	0.90213							
25	标准误差	11.762							
26	观测值	12							
27									
28	方差分析								
29		df	SS	MS	F	ignificance F			
30	回归分析	1	14166.4156	14166.4156	102.4	1.43E-06			
31	残差	10	1383.44549	138.344549					
32	总计	11	15549.8611						
33									
34		Coefficien	标准误差	t Stat	P-value	Lower 95%	upper 95%	下限 95.0%	上限 95.0%
35	Intercep	118.864	7.2390081	16.4199564	1.50E-08	102.7346797	134.99	102.7347	134.994
36	时间	9.95318	0.983558751	10.1192649	1.40E-06	7.761612654	12.145	7.761613	12.1448

图附－25

8．预测。在G14:G17 单元格中分别填入刚才计算出的四个调整后的季节指数，在 B14 单元格中输入公式“=（$B$35+I14＊$B$36)＊G14”，其中“（$B$35+I14＊$B$36)”只是趋势变动的预测结果，乘以 G14（季节指数）后，则反映的是趋势变动和季节循环变动叠加之后的预测结果。然后将此公式复制到B15:B17 单元格，B14:B17 单元格中就是 1999 年各个季度旅游人数的预测值，如图附－26 所示。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	季度	旅游人数	一次移动平均	中心化移动平均	季节指数	平均季节指数	整季节指数	消除季节变动	时间
14	1999.1	166.4773					0.67059		13
15	1999.2	225.1622					0.87202		14
16	1999.3	488.1278					1.82027		15
17	1999.4	177.1935					0.63712		16

图附－26

（三）结果说明

以上步骤完成了整个季节时间序列的分析和预测过程。使用了分解分析的方法，能将时间数列的各个影响因数都分解出来，由这种方法得到的预测模型和预测结果都比直接对时间序列使用回归分析要更为可靠合理。读者可以参考以上分析步骤，用类似的方法在 Excel 中进行月份时间序列、双循环变动时间序列等的分解分析和预测。

Excel 统计函数一览表

函 数 名 称	函 数 功 能
AVEDEV	计算一组数据与其均值的绝对偏差的平均值，用于评测这组数据的离散程度
AVERAGE	计算指定序列算术平均值
AVERAGEA	计算参数清单中数值的算数平均值。不仅数字，而且文本和逻辑值（如 TRUE 和 FALSE）也将计算在内
BETADIST	计算 Beta 分布累积函数的函数值。Beta 分面累积函数通常用于研究样本集合中某些事物的发生和变化情况
BETAINV	计算 Beta 分布累积函数的逆函数值。即，如果 probability = BETADIST（x，…），则 BETAINV（probability,...）= x。Beta 分布累积函数可用于项目设计，在给定期望的完成时间和变化参数后，模拟可能的完成时间
BINOMDIST	计算一元二项式分布的概率值。函数 BINOMDIST 适用于固定次数的独立实验，实验的结果只包含成功或失败两种情况，且成功的概率在实验期间固定不变。例如，函数 BINOMDIST 可以计算三个婴儿中两个是男孩的概率
CHIDIST	计算 χ^2 分布的单尾概率值。χ^2 分布与 χ^2 检验相关。使用 χ^2 检验可以比较观察值和期望值。例如，某项遗传学实验假设下一代植物将呈现出某一组颜色。使用此函数比较观测结果和期望值，可以确定初始假设是否有效
CHIINV	计算 χ^2 分布单尾概率的逆函数。如果 probability = CHIDIST（x,?），则 CHIINV（probability,?）= x。使用此函数比较观测结果和期望值，可以确定初始假设是否有效
CHITEST	计算独立性检验值。函数 CHITEST 计算 χ^2 分布的统计值及相应的自由度。可以使用 χ^2 检验确定假设值是否被实验所证实
CONFIDENCE	计算总体平均值的置信区间。置信区间是样本平均值任意一侧的区域。例如，如果通过邮购的方式订购产品，依照给定的置信度，可以确定最早及最晚到货的时间
CORREL	计算单元格区域 array1 和 array2 之间的相关系数。使用相关系数可以确定两种属性之间的关系。例如，可以检测某地的平均温度和空调使用情况之间的关系
COUNT	计算参数的个数。利用函数 COUNT 可以计算数组或单元格区域中数字项的个数
COUNTA	计算参数组中非空值的数目。利用函数 COUNTA 还可以计算数组或单元格区域中数据项的个数
COVAR	计算协方差，即每对数据点的偏差乘积的平均数，利用协方差可以决定两个数据集之间的关系。例如，可利用它来检验教育程度与收入档次之间的关系
CRITBINOM	计算使累积二项式分布大于等于临界值的最小值。此函数可以用于质量检验。例如，使用函数 CRITBINOM 来决定最多允许出现多少个有缺陷的部件，才可以保证当整个产品在离开装配线时检验合格

续表

函数名称	函数功能
DEVSQ	计算数据点与各自样本均值偏差的平方和
EXPONDIST	计算指数分布。使用函数 EXPONDIST 可以建立事件之间的时间间隔模型。例如，在计算银行自动提款机支付一次现金所花费的时间时，可通过函数 EXPONDIST确定这一过程最长持续一分钟的发生概率
FDIST	计算 F 概率分布。使用此函数可以确定两个数据系列是否存在变化程度上的不同。例如，分析进入高校的男生、女生的考试分数，确定女生分数的变化程度是否与男生不同
FINV	计算 F 概率分布的逆函数值。如果 p = FDIST（x，⋯），则 FINV（p，⋯）= x。在 F 检验中，可以使用 F 分布比较两个数据集的变化程度。例如，可以分析美国、加拿大的收入分布，判断两个国家是否有相似的收入变化程度
FISHER	计算点 x 的 Fisher 变换。该变换生成一个近似正态分布而非偏斜的函数。使用此函数可以完成相关系数的假设检验
FISHERINV	计算 Fisher 变换的逆函数值。使用此变换可以分析数据区域或数组之间的相关性。如果 y = FISHER（x），则 FISHERINV（y）= x
FORECAST	根据给定的数据计算或预测未来值。此预测值为基于一系列已知的 x 值推导出的 y 值。以数组或数据区域的形式给定 x 值和 y 值后，计算基于 x 的线性回归预测值。使用此函数可以对未来销售额、库存需求或消费趋势进行预测
FREQUENCY	以一列垂直数组计算某个区域中数据的频率分布。例如，使用函数 FREQUENCY 可以计算在给定的值集和接收区间内每个区间内的数据数目。由于函数 FREQUENCY 计算一个数组，必须以数组公式的形式输入
FTEST	计算 F 检验的结果。F 检验计算的是当数组 1 和数组 2 的方差无明显差异时的单尾概率。可以使用此函数来判断两个样本的方差是否不同。例如，给定公办和私办学校的测试成绩，可以检验各学校间的差别程度
GAMMADIST	计算 γ 分布。可以使用此函数来研究具有偏态分布的变量。γ 分布通常用于排队分析
GAMMAINV	计算 γ 分布的累积函数的逆函数。如果 p = GAMMADIST（x，⋯），则 GAMMAINV（p，⋯）= x。使用此函数可以研究出现分布偏斜的变量
GAMMALN	计算 γ 函数的自然对数 Γ（x）
GEOMEAN	计算正数数组或数据区域的几何平均值。例如，可以使用函数 GEOMEAN 计算可变复利的平均增长率
GROWTH	根据给定的数据预测指数增长值。根据已知的 x 值和 y 值，函数 GROWTH 计算一组新的 x 值对应的 y 值。可以使用 GROWTH 工作表函数来拟合满足给定 x 值对应的 y 值。可以使用 GROWTH 工作表函数来拟合满足给定 x 值的指数曲线
HARMEAN	计算数据集合的调和平均值。调和平均值与倒数的算术平均值互为倒数

续表

函 数 名 称	函 数 功 能
HYPGEOMDIST	计算超几何分布。给定样本容量、样本总体容量和样本总体中成功的次数，函数 HYPGEOMDIST 计算样本取得给定成功次数的概率。使用函数 HYPGEOMDIST 可以解决有限总体的问题，其中每个观察值或者为成功或者为失败，且给定样本区间的所有子集有相等的发生概率
INTERCEPT	利用已知的 x 值与 y 值计算最小二乘直线的截距。例如，当所有的数据点都是在室温或更高的温度下取得的，可以用函数 INTERCEPT 预测在 0℃ 时金属的电阻
KURT	计算数据集的峰值。峰值反映与正态分布相比某一分布的尖锐度或平坦度。正峰值表示相对尖锐的分布；负峰值表示相对平坦的分布
LARGE	计算数据集里第 k 个最大值。使用此函数可以根据相对标准来选择数值。例如，可以使用函数 LARGE 得到第一名、第二名或第三名的得分
LINEST	使用最小二乘法计算对已知数据进行最佳直线拟合，并计算描述此直线的数组。因为此函数计算数值数组，故必须以数组公式的形式输入
LOGEST	在回归分析中，计算最符合观测数据组的指数回归拟合曲线，并计算描述该曲线的数组。由于这个函数计算一个数组，故必须以数组公式的形式输入
LOGINV	计算 x 的对数正态分布累积函数的逆函数，此处的 ln（x）是含有 mean（平均数）与 standard - dev（标准差）参数的正态分布。如果 p = LOGNORMDIST（x，…）那么 LOGINV（p，…）= x。使用对数正态分布可以分析经过对数变换的数据
LOGNORMDIST	计算 x 的对数正态分布的累积函数，其中 ln（x）是服从参数为 mean 和 standard - dev 的正态分布。使用此函数可以分析经过对数变换的数据
MAX	计算数据集中的最大数值
MAXA	计算参数清单中的最大数值。文本值和逻辑值（如 TRUE 和 FALSE）也作为数字来计算。函数 MAXA 与函数 MINA 相似
MEDIAN	计算给定数值集合的中位数。中位数是在一组数据中居于中间的数，换句话说，在这组数据中，有一半的数据比它大，有一半的数据比它小
MIN	计算给定参数表中的最小值
MINA	计算参数清单中的最小数值。文本值和逻辑值（如 TRUE 和 FALSE）也作为数字来计算
MODE	计算在某一数组或数据区域中出现频率最多的数值。跟 MEDIAN 一样，MODE 也是一个位置测量函数
NEGBINOMDIST	计算负二项式分布。当成功概率为常数 probability_s 时，函数 NEGBINOMDIST 计算在到达 number_s 次成功之前，出现 number_f 次失败的概率。此函数与二项式分布相似，只是它的成功次数固定，试验总数为变量。与二项式分布类似的是，试验次数被假设为自变量

续表

函 数 名 称	函 数 功 能
NORMDIST	计算给定平均值和标准偏差的正态分布的累积函数。此函数在统计方面应用范围广泛（包括假设检验）
NORMINV	计算给定平均值和标准偏差的正态分布的累积函数的逆函数
NORMSDIST	计算标准正态分布的累积函数，该分布的平均值为 0，标准偏差为 1。可以使用该函数代替标准正态曲线面积表
NORMSINV	计算标准正态分布累积函数的逆函数。该分布的平均值为 0，标准偏差为 1
PEARSON	计算 Pearson（皮尔生）乘积矩相关系数 r，这是一个范围在 -1.0 到 1.0 之间（包括 -1.0 和 1.0 在内）的无量纲指数，反映了两个数据集合之间的线性相关程度
PERCENTILE	计算数值区域的 K 百分比数值点。可以使用此函数来建立接受阀值。例如，可以确定得分排名在 90 个百分点以上的检测候选人
PERCENTRANK	计算特定数值在一个数据集中的百分比排位。此函数可用于查看特定数据在数据集中所处的位置。例如，可以使用函数 PERCENTRANK 计算某个特定的能力测试得分在所有的能力测试得分中的位置
PERMUT	计算从给定数目的对象集合中选取的若干对象的排列数。排列可以为有内部顺序的对象或为事件的任意集合或子集。排列与组合不同，组合的内部顺序无意义。此函数可用于彩票计算中的概率
POISSON	计算泊松分布。泊松分布通常用于预测一段时间内事件发生的次数，比如一分钟内通过收费站的轿车的数量
PROB	计算一概率事件组中落在指定区域内的事件所对应的概率之和。如果没有给出 upper _ limit，则计算 x _ range 内值等于 lower _ limit 的概率
QUARTILE	计算数据集的四分位数。四分位数通常用于在销售额和测量值数据集中对总体进行分组。例如，可以使用函数 QUARTILE 求得总体中前 25% 的收入值
RANK	计算一个数值在一组数值中的排位。数值的排位是与数据清单中其他数值的相对大小（如果数据清单已经排过序了，则数值的排位就是它当前的位置）
RSQ	计算根据 known _ y's 和 known _ x's 中数据点计算得出的 Pearson 乘积矩相关系数的平方。详细内容参阅函数 PEARSON。R 平方值可以解释为 y 方差与 x 方差的比例
SKEW	计算分布的偏斜度。偏斜度反映以平均值为中心的分布的不对称程度。正偏斜度表示不对称边的分布更趋向正值；负偏斜度表示不对称边的分布更趋向负值
SLOPE	计算根据 known _ y's 和 known _ x's 中的数据点拟合的线性回归直线的斜率。斜率为直线上任意两点的垂直距离与水平距离的比值，也就是回归直线的变化率
SMALL	计算数据集中第 k 个最小值。使用此函数可以计算数据集中特定位置上的数值

续表

函数名称	函数功能
STANDARDIZE	计算以 mean 为平均值，以 standard－dev 为标准偏差的分布的正态化数值
STDEV	估算样本的标准偏差。标准偏差反映相对于平均值（mean）的离散程度
STDEVA	估算基于给定样本的标准偏差。标准偏差反映数值相对于平均值（mean）的离散程度。文本值和逻辑值（如 TRUE 或 FALSE）也将计算在内
STDEVP	计算以参数形式给出的整个样本总体的标准偏差。标准偏差反映相对于平均值（mean）的离散程度
STDEVPA	计算样本总体的标准偏差。标准偏差反映数值相对平均值（mean）的离散程度
STEYX	计算通过线性回归法计算 y 预测值时所计算的标准误差。标准误差用来度量根据单个 x 变量计算出的 y 预测值的误差量
TDIST	计算 t 分布。t 分布用于小样本数据集合的假设检验。使用此函数可以代替 t 分布的临界值表
TINV	计算指定自由度的学生氏 t 分布的逆函数
TREND	计算一条线性回归拟合线的一组纵坐标值（y 值）。即找到适合给定的数组 known _ y's 和 known _ x's 的直线（用最小二乘法），并计算指定数组 new _ x's 值在直线上对应的 y 值
TRIMMEAN	计算数据集的内部平均值。函数 TRIMMEAN 先从数据集的头部和尾部除去一定百分比的数据点，然后再求平均值。当希望在分析中剔除一部分数据的计算时，可以使用此函数
TTEST	计算与 t 检验相关的概率。可以使用函数 TTEST 判断两个样本是否可能来自两个具有相同均值的总体
VAR	估算样本方差
VARA	估算基于给定样本的方差。不仅数字，文本值和逻辑值（如 TRUE 和 FALSE）也将计算在内
VARP	计算样本总体的方差
VARPA	计算样本总体的方差。不仅数字，文本值和逻辑值（如 TRUE 和 FALSE）也将计算在内
WEIBULL	计算韦伯分布。使用此函数可以进行可靠性分析，比如计算设备的平均故障时间
ZTEST	计算 Z 检验的双尾 P 值。Z 检验根据数据集或数组生成 x 的标准得分，并计算正态分布的双尾概率。可以使用此函数计算从某总体中抽取特定观测值的似然估计

附录 2 常用统计表

表 1 二项分布表

$$P\{x\}=\frac{n!}{x!\ (n-x)!}p^x q^{n-x}$$

n	x	θ 0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
1	0	0.950 0	0.900 0	0.850 0	0.800 0	0.750 0	0.700 0	0.650 0	0.600 0	0.550 0	0.500 0	0.450 0	0.400 0	0.350 0	0.300 0	0.250 0	0.200 0	0.150 0	0.100 0	0.050 0
	1	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
2	0	0.902 5	0.810 0	0.722 5	0.640 0	0.562 5	0.490 0	0.422 5	0.360 0	0.302 5	0.250 0	0.202 5	0.160 0	0.122 5	0.090 0	0.062 5	0.040 0	0.022 5	0.010 0	0.002 5
	1	0.997 5	0.990 0	0.977 5	0.960 0	0.937 5	0.910 0	0.877 5	0.840 0	0.797 5	0.750 0	0.697 5	0.640 0	0.577 5	0.510 0	0.437 5	0.360 0	0.277 5	0.190 0	0.097 5
	2	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
3	0	0.857 4	0.729 0	0.614 1	0.512 0	0.421 9	0.343 0	0.274 6	0.216 0	0.166 4	0.125 0	0.091 1	0.064 0	0.042 9	0.027 0	0.015 6	0.008 0	0.003 4	0.001 0	0.000 1
	1	0.992 8	0.972 0	0.939 2	0.896 0	0.643 8	0.784 0	0.718 2	0.648 0	0.574 8	0.500 0	0.425 2	0.352 0	0.281 8	0.216 0	0.156 2	0.104 0	0.060 8	0.028 0	0.007 2
	2	0.999 9	0.999 0	0.996 6	0.992 0	0.984 4	0.973 0	0.957 1	0.936 0	0.908 9	0.875 0	0.833 6	0.784 0	0.725 4	0.657 0	0.578 1	0.488 0	0.385 9	0.271 0	0.142 6
	3	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
4	0	0.814 5	0.656 1	0.522 0	0.409 6	0.316 4	0.240 1	0.178 5	0.129 6	0.091 5	0.062 5	0.041 0	0.025 6	0.015 0	0.008 1	0.003 9	0.001 6	0.000 5	0.000 1	0.000 0
	1	0.986 0	0.947 7	0.890 5	0.819 2	0.738 3	0.651 7	0.563 0	0.475 2	0.391 0	0.312 5	0.241 5	0.179 2	0.126 5	0.083 7	0.050 8	0.027 2	0.012 0	0.003 7	0.000 5
	2	0.999 5	0.996 3	0.988 0	0.972 8	0.949 2	0.916 3	0.873 5	0.820 8	0.758 5	0.687 5	0.609 0	0.524 8	0.437 0	0.348 3	0.261 7	0.180 8	0.109 5	0.052 3	0.014 0
	3	1.000 0	0.999 9	0.999 5	0.998 4	0.996 1	0.991 9	0.985 0	0.974 4	0.959 0	0.937 5	0.908 5	0.870 4	0.821 5	0.759 9	0.683 6	0.590 4	0.478 0	0.343 9	0.185 5
	4	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
5	0	0.773 8	0.590 5	0.443 7	0.327 7	0.237 3	0.168 1	0.116 0	0.077 8	0.050 3	0.031 2	0.018 5	0.010 2	0.005 3	0.002 4	0.001 0	0.000 3	0.000 1	0.000 0	0.000 0
	1	0.977 4	0.918 5	0.835 2	0.737 3	0.632 8	0.528 2	0.428 4	0.337 0	0.256 2	0.185 7	0.131 2	0.087 0	0.054 0	0.030 8	0.015 6	0.006 7	0.002 2	0.000 5	0.000 0
	2	0.998 8	0.991 4	0.973 4	0.942 1	0.896 5	0.836 9	0.764 8	0.682 6	0.593 1	0.500 0	0.406 9	0.317 4	0.235 2	0.163 1	0.103 5	0.057 9	0.026 6	0.008 6	0.001 2
	3	1.000 0	0.999 5	0.997 8	0.993 3	0.984 4	0.969 2	0.946 0	0.913 0	0.868 8	0.812 5	0.743 8	0.663 0	0.571 6	0.471 8	0.367 2	0.262 7	0.164 8	0.081 5	0.022 6

续表

n	x	θ																		
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
	4	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 7	0.999 0	0.997 6	0.994 7	0.989 8	0.981 5	0.968 8	0.949 7	1.922 2	0.884 0	0.831 9	0.762 7	0.672 3	0.556 3	0.409 5	0.226 2
	5	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
6	0	0.735 1	0.531 4	0.377 1	0.262 1	0.178 0	0.117 6	0.075 4	0.046 7	0.027 7	0.015 6	0.008 3	0.004 1	0.001 8	0.000 7	0.000 2	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	1	0.967 2	0.885 7	0.776 5	0.655 4	0.533 9	0.420 2	0.319 1	0.233 3	0.163 6	0.109 4	0.069 2	0.041 0	0.022 3	0.010 9	0.004 6	0.001 6	0.000 4	0.000 1	0.000 0
	2	0.997 8	0.984 2	0.952 7	0.901 1	0.830 6	0.744 3	0.647 1	0.544 3	0.441 5	0.343 8	0.255 3	0.179 2	0.117 4	0.070 5	0.037 6	0.017 0	0.005 9	0.001 3	0.000 1
	3	0.999 9	0.998 7	0.994 1	0.983 0	0.962 4	0.929 5	0.882 6	0.820 8	0.744 7	0.656 2	0.558 5	0.455 7	0.352 9	0.255 7	0.169 4	0.098 9	0.047 3	0.015 8	0.002 2
	4	1.000 0	0.999 9	0.999 6	0.998 4	0.995 4	0.989 1	0.977 7	0.959 0	0.930 8	0.890 6	0.836 4	0.766 7	0.680 9	0.579 8	0.466 1	0.344 6	0.223 5	0.114 3	0.032 8
	5	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 8	0.999 3	0.998 2	0.995 9	0.991 7	0.984 4	0.972 3	0.953 3	0.924 6	0.882 4	0.822 0	0.737 9	0.622 9	0.468 6	0.264 9
	6	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
7	0	0.698 3	0.478 3	0.320 6	0.209 7	0.133 5	0.082 4	0.049 0	0.028 0	0.015 2	0.007 8	0.003 7	0.001 6	0.000 6	0.000 2	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	1	0.955 6	0.850 3	0.716 6	0.576 7	0.444 9	0.329 4	0.233 8	0.158 6	0.102 4	0.062 5	0.035 7	0.018 8	0.009 0	0.003 8	0.001 3	0.000 4	0.000 1	0.000 0	0.000 0
	2	0.996 2	0.974 3	0.926 2	0.852 0	0.756 4	0.647 1	0.532 3	0.419 9	0.316 4	0.226 6	0.152 9	0.096 3	0.055 6	0.028 8	0.012 9	0.004 7	0.001 2	0.000 2	0.000 0
	3	0.999 8	0.997 3	0.987 9	0.966 7	0.929 4	0.874 0	0.800 2	0.710 2	0.608 3	0.500 0	0.391 7	0.289 8	0.199 8	0.126 0	0.070 6	0.033 3	0.012 1	0.002 7	0.000 2
	4	1.000 0	0.999 8	0.998 8	0.995 3	0.987 1	0.971 2	0.944 4	0.903 7	0.847 1	0.773 4	0.683 6	0.580 1	0.467 7	0.352 9	0.243 6	0.148 0	0.073 8	0.025 7	0.003 8
	5	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 6	0.998 7	0.996 2	0.991 0	0.981 2	0.964 3	0.937 5	0.897 6	0.841 4	0.766 2	0.670 6	0.555 1	0.423 3	0.283 4	0.149 7	0.044 4
	6	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 8	0.999 4	0.998 4	0.996 3	0.992 2	0.984 8	0.972 0	0.951 0	0.917 6	0.866 5	0.790 3	0.679 4	0.521 7	0.301 7
	7	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
8	0	0.663 4	0.430 5	0.272 5	0.167 8	0.100 1	0.057 6	0.031 9	0.016 8	0.008 4	0.003 9	0.001 7	0.000 7	0.000 2	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	1	0.942 8	0.813 1	0.657 2	0.503 3	0.367 1	0.255 3	0.169 1	0.106 4	0.063 2	0.035 2	0.018 1	0.008 5	0.003 6	0.001 3	0.000 4	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	2	0.994 2	0.961 9	0.894 8	0.796 9	0.678 5	0.551 8	0.427 8	0.315 4	0.220 1	0.144 5	0.088 5	0.049 8	0.025 3	0.011 3	0.004 2	0.001 2	0.000 2	0.000 0	0.000 0
	3	0.999 6	0.995 0	0.978 6	0.943 7	0.886 2	0.805 9	0.706 4	0.594 1	0.477 0	0.363 3	0.260 4	0.173 7	0.106 1	0.058 0	0.027 3	0.010 4	0.002 9	0.000 4	0.000 0
	4	1.000 0	0.999 6	0.997 1	0.989 6	0.972 7	0.942 0	0.893 9	0.826 3	0.739 6	0.636 7	0.523 0	0.405 9	0.293 6	0.194 1	0.113 8	0.056 3	0.021 4	0.005 0	0.000 4
	5	1.000 0	1.000 0	0.999 8	0.998 8	0.995 8	0.988 7	0.974 7	0.950 2	0.911 5	0.855 5	0.779 9	0.684 6	0.572 2	0.448 2	0.321 5	0.203 1	0.105 2	0.038 1	0.005 8
	6	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 6	0.998 7	0.996 4	0.991 5	0.981 9	0.964 8	0.936 8	0.893 6	0.830 9	0.744 7	0.632 9	0.496 7	0.342 8	0.186 9	0.057 2
	7	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 8	0.999 3	0.998 3	0.996 1	0.991 6	0.983 2	0.968 1	0.942 4	0.899 9	0.832 2	0.727 5	0.569 5	0.336 6
	8	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
9	0	0.630 2	0.387 4	0.231 6	0.134 2	0.075 1	0.040 4	0.020 7	0.010 1	0.004 6	0.002 0	0.000 8	0.000 3	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	1	0.928 8	0.774 8	0.599 5	0.436 2	0.300 3	0.196 0	0.121 1	0.070 5	0.038 5	0.019 5	0.009 1	0.003 8	0.001 4	0.000 4	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	2	0.991 6	0.947 0	0.859 1	0.738 2	0.600 7	0.462 8	0.337 3	0.231 8	0.149 5	0.089 8	0.049 8	0.025 0	0.011 2	0.004 3	0.001 3	0.000 3	0.000 0	0.000 0	0.000 0

续表

n	x	θ=0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
	3	0.999 4	0.991 7	0.966 1	0.914 4	0.834 3	0.729 7	0.608 9	0.482 6	0.361 4	0.253 9	0.165 8	0.099 4	0.053 6	0.025 3	0.010 0	0.003 1	0.000 6	0.000 1	0.000 0
	4	1.000 0	0.999 1	0.994 4	0.980 4	0.951 1	0.901 2	0.828 3	0.733 4	0.621 4	0.500 0	0.378 6	0.266 6	0.171 7	0.098 8	0.048 9	0.019 6	0.005 6	0.000 9	0.000 0
	5	1.000 0	0.999 9	0.999 4	0.996 9	0.990 0	0.974 7	0.946 4	0.900 6	0.834 2	0.746 1	0.638 6	0.517 4	0.391 1	0.270 3	0.165 7	0.085 6	0.033 9	0.008 3	0.000 6
	6	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 7	0.998 7	0.995 7	0.988 8	0.975 0	0.950 2	0.910 2	0.850 5	0.768 2	0.662 7	0.537 2	0.399 3	0.261 8	0.140 9	0.053 0	0.008 4
	7	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 6	0.998 6	0.996 2	0.990 9	0.980 5	0.961 5	0.929 5	0.878 9	0.804 0	0.699 7	0.563 8	0.400 5	0.225 2	0.071 2
	8	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 7	0.999 2	0.998 0	0.995 4	0.989 9	0.979 3	0.959 6	0.924 9	0.865 8	0.768 4	0.612 6	0.369 8
	9	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
10	0	0.598 7	0.348 7	0.196 9	0.107 4	0.056 3	0.028 2	0.013 5	0.006 0	0.002 5	0.001 0	0.000 3	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	1	0.913 9	0.736 1	0.544 3	0.375 8	0.244 0	0.149 3	0.086 0	0.046 4	0.023 3	0.010 7	0.004 5	0.001 7	0.000 5	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	2	0.988 5	0.929 8	0.820 2	0.677 8	0.525 6	0.382 8	0.261 6	0.167 3	0.099 6	0.054 7	0.027 4	0.012 3	0.004 8	0.001 6	0.000 4	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	3	0.999 0	0.987 2	0.950 0	0.879 1	0.775 9	0.649 6	0.513 8	0.382 3	0.266 0	0.171 9	0.102 0	0.054 8	0.026 0	0.101 6	0.003 5	0.000 9	0.000 1	0.000 0	0.000 0
	4	0.999 9	0.998 4	0.990 1	0.967 2	0.921 9	0.849 7	0.751 5	0.633 1	0.504 4	0.377 0	0.261 6	0.166 2	0.094 9	0.047 3	0.019 7	0.006 4	0.001 4	0.000 1	0.000 0
	5	1.000 0	0.999 9	0.998 6	0.993 6	0.980 3	0.952 7	0.905 1	0.833 8	0.738 4	0.623 0	0.495 6	0.366 9	0.248 5	0.150 3	0.078 1	0.032 8	0.009 9	0.001 6	0.000 1
	6	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 1	0.996 5	0.989 4	0.974 0	0.945 2	0.898 0	0.828 1	0.734 0	0.617 7	0.486 2	0.350 4	0.224 1	0.120 9	0.050 0	0.012 8	0.001 0
	7	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 6	0.998 4	0.995 2	0.987 7	0.972 6	0.945 3	0.900 4	0.832 7	0.738 4	0.617 2	0.474 4	0.322 2	0.179 8	0.070 2	0.011 5
	8	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 5	0.998 3	0.995 5	0.989 3	0.976 7	0.953 6	0.914 0	0.850 7	0.756 0	0.624 2	0.455 7	0.263 9	0.086 1
	9	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 7	0.999 0	0.997 5	0.994 0	0.986 5	0.971 8	0.943 7	0.892 6	0.803 1	0.651 3	0.401 3
	10	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
11	0	0.568 8	0.313 8	0.167 3	0.085 9	0.042 2	0.019 8	0.008 8	0.003 6	0.001 4	0.000 5	0.000 2	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	1	0.898 1	0.697 4	0.492 2	0.322 1	0.197 1	0.113 0	0.060 6	0.030 2	0.013 9	0.005 9	0.002 2	0.000 7	0.000 2	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	2	0.984 8	0.910 4	0.778 8	0.617 4	0.455 2	0.312 7	0.200 1	0.118 9	0.065 2	0.032 7	0.014 8	0.005 9	0.002 0	0.000 6	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	3	0.998 4	0.981 5	0.930 6	0.838 9	0.713 3	0.569 6	0.425 6	0.296 3	0.191 1	0.113 3	0.061 0	0.029 3	0.012 2	0.004 3	0.001 2	0.000 2	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	4	0.999 9	0.997 2	0.984 1	0.949 6	0.885 4	0.789 7	0.668 3	0.532 8	0.397 1	0.274 4	0.173 8	0.099 4	0.050 1	0.021 6	0.007 6	0.002 0	0.000 3	0.000 0	0.000 0
	5	1.000 0	0.999 7	0.997 3	0.988 3	0.965 7	0.921 8	0.851 3	0.753 5	0.633 1	0.500 0	0.366 9	0.246 5	0.148 7	0.078 2	0.034 3	0.011 7	0.002 7	0.000 3	0.000 0
	6	1.000 0	1.000 0	0.999 7	0.998 0	0.992 4	0.978 4	0.949 9	0.900 6	0.826 2	0.725 6	0.602 9	0.467 2	0.331 7	0.210 3	0.114 6	0.050 4	0.015 9	0.002 8	0.000 1
	7	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 8	0.998 8	0.995 7	0.987 8	0.970 7	0.939 0	0.886 7	0.808 9	0.703 7	0.574 4	0.430 4	0.286 7	0.161 1	0.069 4	0.018 5	0.001 6
	8	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 4	0.998 0	0.994 1	0.985 2	0.967 3	0.934 8	0.881 1	0.799 9	0.687 3	0.544 8	0.382 6	0.221 2	0.089 6	0.015 2
	9	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.998 8	0.999 3	0.997 8	0.994 1	0.986 1	0.969 8	0.939 4	0.887 0	0.802 9	0.677 9	0.507 8	0.302 6	0.101 9
	10	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 8	0.999 5	0.998 6	0.996 4	0.991 2	0.980 2	0.957 8	0.914 1	0.832 7	0.686 2	0.431 2
	11	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0

续表

n	x	θ=0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
12	0	0.540 4	0.282 4	0.142 2	0.068 7	0.031 7	0.013 8	0.005 7	0.002 2	0.000 8	0.000 2	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	1	0.881 6	0.659 0	0.443 5	0.274 9	0.158 4	0.085 0	0.042 4	0.019 6	0.008 3	0.003 2	0.001 1	0.000 3	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	2	0.980 4	0.889 1	0.735 8	0.558 3	0.390 7	0.252 8	0.151 3	0.083 4	0.042 1	0.019 3	0.007 9	0.002 8	0.000 8	0.000 2	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	3	0.997 8	0.974 4	0.907 8	0.794 6	0.648 8	0.492 5	0.346 7	0.225 3	0.134 5	0.073 0	0.035 6	0.015 3	0.005 6	0.001 7	0.000 4	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	4	0.999 8	0.995 7	0.976 1	0.927 4	0.842 4	0.723 7	0.583 3	0.438 2	0.304 4	0.193 8	0.111 7	0.057 3	0.025 5	0.009 5	0.002 8	0.000 6	0.000 1	0.000 0	0.000 0
	5	1.000 0	0.999 5	0.995 4	0.980 6	0.945 6	0.882 2	0.787 3	0.665 2	0.526 9	0.387 2	0.260 7	0.158 2	0.084 6	0.038 6	0.014 3	0.003 9	0.000 7	0.000 1	0.000 0
	6	1.000 0	0.999 9	0.999 3	0.996 1	0.985 7	0.961 4	0.915 4	0.841 8	0.739 3	0.612 8	0.473 1	0.334 8	0.212 7	0.117 8	0.054 4	0.019 4	0.004 6	0.000 5	0.000 0
	7	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 4	0.997 2	0.990 5	0.974 5	0.942 7	0.888 5	0.806 2	0.695 6	0.561 8	0.416 7	0.276 3	0.157 6	0.072 6	0.023 9	0.004 3	0.000 2
	8	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 6	0.998 3	0.994 4	0.984 7	0.964 4	0.927 0	0.865 5	0.774 7	0.653 3	0.507 5	0.351 2	0.205 4	0.092 2	0.025 6	0.002 2
	9	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 8	0.999 2	0.997 2	0.992 1	0.980 7	0.957 9	0.916 6	0.848 7	0.747 2	0.609 3	0.441 7	0.264 2	0.110 9	0.019 6
	10	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 7	0.998 9	0.996 8	0.991 7	0.980 4	0.957 6	0.915 0	0.841 6	0.725 1	0.556 5	0.341 0	0.118 4
	11	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 8	0.999 2	0.997 8	0.994 3	0.986 2	0.968 3	0.931 3	0.857 8	0.717 6	0.459 6
	12	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
13	0	0.513 3	0.254 2	0.120 9	0.055 0	0.023 8	0.009 7	0.003 7	0.001 3	0.000 4	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	1	0.864 6	0.621 3	0.398 3	0.233 6	0.126 7	0.063 7	0.029 6	0.012 6	0.004 9	0.001 7	0.000 5	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	2	0.975 5	0.866 1	0.729 6	0.501 7	0.332 6	0.202 5	0.013 2	0.057 9	0.026 9	0.011 2	0.004 1	0.001 3	0.000 3	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	3	0.996 9	0.965 8	0.903 3	0.747 3	0.584 3	0.420 6	0.278 3	0.168 6	0.092 9	0.046 1	0.020 3	0.007 8	0.002 5	0.000 7	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	4	0.999 7	0.993 5	0.974 0	0.900 9	0.794 0	0.654 3	0.500 5	0.353 0	0.227 9	0.133 4	0.069 8	0.032 1	0.012 6	0.004 0	0.001 0	0.000 2	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	5	1.000 0	0.999 1	0.994 7	0.970 0	0.919 8	0.834 6	0.715 9	0.574 4	0.426 0	0.290 5	0.178 0	0.097 7	0.046 2	0.018 2	0.005 6	0.001 2	0.000 2	0.000 0	0.000 0
	6	1.000 0	0.999 9	0.998 7	0.993 0	0.975 7	0.927 6	0.873 5	0.771 2	0.643 7	0.500 0	0.356 3	0.228 8	0.129 5	0.062 4	0.024 3	0.007 0	0.001 3	0.000 1	0.000 0
	7	1.000 0	1.000 0	0.999 8	0.998 8	0.994 4	0.981 8	0.953 8	0.902 3	0.821 2	0.709 5	0.573 2	0.425 6	0.284 1	0.165 4	0.030 2	0.030 0	0.005 3	0.000 9	0.000 0
	8	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 8	0.999 0	0.996 0	0.987 4	0.967 9	0.930 2	0.866 6	0.772 1	0.647 0	0.499 5	0.345 7	0.206 0	0.099 1	0.026 0	0.006 5	0.000 3
	9	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 3	0.997 5	0.992 2	0.979 7	0.953 9	0.907 1	0.831 4	0.721 7	0.579 4	0.415 7	0.252 7	0.096 7	0.034 2	0.003 1
	10	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 7	0.998 7	0.995 9	0.988 8	0.973 1	0.942 1	0.886 8	0.797 5	0.667 4	0.498 3	0.270 4	0.133 9	0.024 5
	11	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 5	0.998 3	0.995 1	0.987 4	0.970 4	0.936 3	0.873 3	0.766 4	0.601 7	0.378 7	0.135 4
	12	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 6	0.998 7	0.996 3	0.990 3	0.976 2	0.945 0	0.879 1	0.745 8	0.486 7
	13	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
14	0	0.487 7	0.228 8	0.102 8	0.044 0	0.017 8	0.006 8	0.002 4	0.000 8	0.000 2	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	1	0.847 0	0.548 6	0.356 7	0.197 9	0.101 0	0.047 5	0.020 5	0.008 1	0.002 9	0.000 9	0.000 3	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	2	0.969 9	0.841 6	0.647 9	0.448 1	0.281 1	0.160 8	0.083 9	0.039 8	0.017 0	0.006 5	0.002 2	0.000 6	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0

续表

n	x	θ																		
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
	3	0.995 8	0.955 9	0.853 8	0.698 2	0.521 3	0.355 2	0.220 5	0.124 3	0.0632	0.028 7	0.011 4	0.003 9	0.001 1	0.000 2	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	4	0.999 6	0.990 8	0.953 3	0.870 2	0.741 5	0.584 2	0.422 7	0.279 3	0.167 2	0.089 8	0.046 2	0.017 5	0.006 0	0.001 7	0.000 3	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	5	1.000 0	0.998 5	0.988 5	0.956 1	0.888 3	0.780 5	0.640 5	0.485 9	0.337 3	0.212 0	0.118 9	0.058 3	0.024 3	0.008 3	0.002 2	0.000 4	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	6	1.000 0	0.999 8	0.997 8	0.988 4	0.961 7	0.906 7	0.816 4	0.692 5	0.546 1	0.395 3	0.258 6	0.150 1	0.075 3	0.031 5	0.010 3	0.002 4	0.000 3	0.000 0	0.000 0
	7	1.000 0	1.000 0	0.999 7	0.997 6	0.989 7	0.968 5	0.924 7	0.849 9	0.741 4	0.604 7	0.453 9	0.307 5	0.183 6	0.093 3	0.038 3	0.011 6	0.002 2	0.000 2	0.000 0
	8	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 6	0.997 8	0.991 7	0.975 7	0.941 7	0.881 1	0.788 0	0.662 7	0.514 1	0.359 3	0.219 5	0.111 7	0.043 9	0.011 5	0.001 5	0.000 0
	9	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 7	0.998 3	0.994 0	0.982 5	0.957 4	0.910 2	0.832 8	0.720 7	0.577 3	0.415 8	0.258 5	0.129 8	0.046 7	0.009 2	0.000 4
	10	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 8	0.998 9	0.996 1	0.988 6	0.971 3	0.936 8	0.875 5	0.779 5	0.644 8	0.478 7	0.301 8	0.146 5	0.044 1	0.004 2
	11	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 4	0.997 8	0.993 5	0.983 0	0.960 2	0.916 1	0.839 2	0.718 9	0.551 9	0.352 1	0.158 4	0.030 1
	12	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 7	0.999 1	0.997 1	0.991 9	0.979 5	0.952 5	0.899 0	0.802 1	0.643 3	0.415 4	0.153 0
	13	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 8	0.999 2	0.997 6	0.993 2	0.982 2	0.956 0	0.897 2	0.771 2	0.512 3
	14	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
15	0	0.463 3	0.205 9	0.087 4	0.035 2	0.013 4	0.004 7	0.001 6	0.000 5	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	1	0.829 0	0.549 0	0.318 6	0.167 1	0.080 2	0.035 3	0.014 2	0.005 2	0.001 7	0.000 5	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	2	0.963 8	0.815 9	0.604 2	0.398 0	0.236 1	0.126 8	0.061 7	0.027 1	0.010 7	0.003 7	0.001 1	0.000 3	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	3	0.994 5	0.944 4	0.822 7	0.648 2	0.461 3	0.296 9	0.172 7	0.090 5	0.042 4	0.017 6	0.006 3	0.001 9	0.000 5	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	4	0.999 4	0.987 3	0.938 3	0.835 8	0.686 5	0.515 5	0.351 9	0.217 3	0.120 4	0.059 2	0.025 5	0.009 3	0.002 8	0.000 7	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	5	0.999 9	0.997 8	0.983 2	0.938 9	0.851 6	0.721 6	0.564 3	0.403 2	0.260 8	0.150 9	0.076 9	0.033 8	0.012 4	0.003 7	0.000 8	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	6	1.000 0	0.999 7	0.996 4	0.981 9	0.943 4	0.868 9	0.754 8	0.609 8	0.452 2	0.303 6	0.181 8	0.095 0	0.042 2	0.015 2	0.004 2	0.000 8	0.000 1	0.000 0	0.000 0
	7	1.000 0	1.000 0	0.999 4	0.995 8	0.982 7	0.950 0	0.886 8	0.786 9	0.653 5	0.500 0	0.346 5	0.213 1	0.113 2	0.050 0	0.017 3	0.004 2	0.000 6	0.000 0	0.000 0
	8	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 2	0.995 8	0.984 8	0.957 8	0.905 0	0.818 2	0.696 4	0.547 8	0.390 2	0.245 2	0.131 1	0.056 6	0.018 1	0.003 6	0.000 3	0.000 0
	9	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 2	0.996 3	0.987 6	0.966 2	0.923 1	0.849 1	0.739 2	0.596 8	0.435 7	0.278 4	0.148 4	0.061 1	0.016 8	0.002 2	0.000 1
	10	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 3	0.997 2	0.990 7	0.974 5	0.940 8	0.879 6	0.782 7	0.648 1	0.484 5	0.313 5	0.164 2	0.061 7	0.012 7	0.000 6
	11	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 5	0.998 1	0.993 7	0.982 4	0.957 6	0.909 5	0.827 3	0.703 1	0.538 7	0.351 8	0.177 3	0.055 6	0.005 5
	12	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 7	0.998 9	0.996 3	0.989 3	0.972 9	0.938 3	0.873 2	0.763 9	0.602 0	0.395 8	0.184 1	0.036 2
	13	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 5	0.998 3	0.994 8	0.985 8	0.964 7	0.919 8	0.832 9	0.681 4	0.451 0	0.171 0
	14	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 5	0.998 4	0.995 3	0.986 6	0.964 8	0.912 6	0.794 1	0.536 7
	15	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
16	0	0.440 1	0.185 3	0.074 3	0.028 1	0.010 0	0.003 3	0.001 0	0.000 3	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	1	0.810 8	0.514 7	0.283 9	0.140 7	0.063 5	0.026 1	0.009 8	0.003 3	0.001 0	0.000 3	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	2	0.957 1	0.789 2	0.561 4	0.351 8	0.197 1	0.099 4	0.045 1	0.018 3	0.006 6	0.002 1	0.000 6	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0

续表

n	x	θ 0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
	3	0.993 0	0.931 6	0.789 9	0.598 1	0.405 0	0.245 9	0.133 9	0.065 1	0.028 1	0.010 6	0.003 5	0.000 9	0.000 2	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	4	0.999 1	0.983 0	0.920 9	0.798 2	0.630 2	0.449 9	0.289 2	0.166 6	0.085 3	0.038 4	0.014 9	0.004 9	0.001 3	0.000 3	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	5	0.999 9	0.996 7	0.976 5	0.918 3	0.810 3	0.659 8	0.490 0	0.328 8	0.197 6	0.105 1	0.048 6	0.019 1	0.006 2	0.001 6	0.000 3	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	6	1.000 0	0.999 5	0.994 4	0.973 3	0.920 4	0.824 7	0.688 1	0.527 2	0.366 0	0.227 2	0.124 1	0.058 3	0.022 9	0.007 1	0.001 6	0.000 2	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	7	1.000 0	0.999 9	0.998 9	0.993 0	0.972 9	0.925 6	0.840 6	0.716 1	0.562 9	0.401 8	0.255 9	0.142 3	0.067 1	0.025 7	0.007 5	0.001 5	0.000 2	0.000 0	0.000 0
	8	1.000 0	1.000 0	0.999 8	0.998 5	0.992 5	0.974 3	0.932 9	0.857 7	0.744 1	0.598 2	0.437 1	0.283 9	0.159 4	0.074 4	0.027 1	0.007 0	0.001 1	0.000 1	0.000 0
	9	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 8	0.998 4	0.992 9	0.977 1	0.971 7	0.875 9	0.772 8	0.634 0	0.472 8	0.311 9	0.175 3	0.079 6	0.026 7	0.005 6	0.000 5	0.000 0
	10	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000.0	0.999 7	0.998 4	0.993 8	0.980 9	0.951 4	0.8949	0.802 4	0.671 2	0.510 0	0.340 2	0.189 7	0.0817	0.023 5	0.003 3	0.000 1
	11	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 7	0.998 7	0.995 1	0.985 1	0.961 6	0.914 7	0.833 4	0.710 8	0.550 1	0.396 8	0.201 8	0.079 1	0.017 0	0.000 9
	12	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 8	0.999 1	0.996 5	0.989 4	0.971 9	0.934 9	0.866 1	0.754 1	0.595 0	0.401 9	0.210 1	0.068 4	0.007 0
	13	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 4	0.997 9	0.993 4	0.981 7	0.954 9	0.900 6	0.872 9	0.648 2	0.438 6	0.210 8	0.042 8
	14	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 7	0.999 0	0.996 7	0.990 2	0.973 9	0.936 5	0.859 3	0.716 1	0.485 3	0.189 2
	15	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 7	0.999 0	0.996 7	0.990 0	0.971 9	0.925 7	0.814 7	0.559 9
	16	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
17	0	0.418 1	0.166 8	0.063 1	0.022 5	0.007 5	0.002 3	0.000 7	0.000 2	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	1	0.792 2	0.481 8	0.252 5	0.118 2	0.050 1	0.019 3	0.006 7	0.002 1	0.000 6	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	2	0.949 7	0.761 8	0.519 8	0.309 6	0.163 7	0.077 4	0.032 7	0.012 3	0.004 1	0.001 2	0.000 3	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	3	0.991 2	0.917 4	0.755 6	0.548 9	0.353 0	0.201 9	0.102 8	0.046 4	0.018 4	0.006 4	0.001 9	0.000 5	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	4	0.998 8	0.977 9	0.901 3	0.758 2	0.573 9	0.388 7	0.243 8	0.126 0	0.059 6	0.024 5	0.008 6	0.002 5	0.000 6	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	5	0.999 9	0.995 3	0.968 1	0.894 3	0.765 3	0.596 8	0.419 7	0.263 9	0.147 1	0.071 7	0.030 1	0.010 6	0.003 0	0.000 7	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	6	1.000 0	0.999 2	0.991 7	0.962 3	0.892 9	0.775 2	0.618 8	0.447 8	0.290 2	0.166 2	0.082 6	0.034 8	0.012 0	0.003 2	0.000 6	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	7	1.000 0	0.999 9	0.998 3	0.989 1	0.959 8	0.895 4	0.787 2	0.640 5	0.474 3	0.314 5	0.183 4	0.091 9	0.038 3	0.012 7	0.003 1	0.000 5	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	8	1.000 0	1.000 0	0.999 7	0.997 4	0.987 6	0.959 7	0.900 6	0.801 1	0.662 6	0.500 0	0.337 4	0.198 9	0.099 4	0.040 3	0.012 4	0.002 6	0.000 3	0.000 0	0.000 0
	9	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 5	0.996 9	0.987 3	0.961 7	0.908 1	0.816 6	0.685 5	0.525 7	0.359 5	0.212 8	0.104 6	0.040 2	0.010 9	0.001 7	0.000 1	0.000 0
	10	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 4	0.996 8	0.988 0	0.965 2	0.917 4	0.833 8	0.709 8	0.552 2	0.381 2	0.224 8	0.107 1	0.037 7	0.008 3	0.000 8	0.000 0
	11	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 3	0.997 0	0.989 4	0.969 9	0.928 3	0.852 9	0.736 1	0.580 3	0.403 2	0.234 7	0.105 7	0.031 9	0.004 7	0.000 1
	12	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 4	0.997 5	0.991 4	0.975 5	0.940 4	0.874 0	0.765 2	0.611 3	0.426 1	0.241 8	0.098 7	0.022 1	0.001 2
	13	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 5	0.998 1	0.993 6	0.981 6	0.953 6	0.897 2	0.798 1	0.647 0	0.451 1	0.244 4	0.082 6	0.008 8
	14	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 7	0.998 8	0.995 9	0.987 7	0.967 3	0.922 6	0.836 3	0.690 4	0.480 2	0.238 2	0.050 3
	15	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 4	0.997 9	0.993 3	0.980 7	0.949 9	0.881 8	0.747 5	0.518 2	0.207 8
	16	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 8	0.999 3	0.997 7	0.992 5	0.977 5	0.936 9	0.833 2	0.581 9

续表

n	x	θ 0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
	17	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
18	0	0.397 2	0.150 1	0.053 6	0.018 0	0.005 6	0.001 6	0.000 4	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	1	0.773 5	0.450 3	0.224 1	0.099 1	0.039 5	0.014 2	0.004 6	0.001 3	0.000 3	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	2	0.941 9	0.733 8	0.479 7	0.271 3	0.135 3	0.060 0	0.023 6	0.008 2	0.002 5	0.000 7	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	3	0.989 1	0.901 8	0.720 2	0.501 0	0.305 7	0.164 6	0.078 3	0.032 8	0.012 0	0.003 8	0.001 0	0.000 2	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	4	0.998 5	0.971 8	0.879 4	0.716 4	0.518 7	0.332 7	0.188 6	0.094 2	0.041 1	0.015 4	0.004 9	0.001 3	0.000 3	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	5	0.999 8	0.993 6	0.958 1	0.867 1	0.717 5	0.534 4	0.355 0	0.208 8	0.107 7	0.048 1	0.018 3	0.005 8	0.001 4	0.000 3	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	6	1.000 0	0.998 8	0.988 2	0.948 7	0.861 0	0.721 7	0.549 1	0.374 3	0.225 8	0.118 9	0.053 7	0.020 3	0.006 2	0.001 4	0.000 2	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	7	1.000 0	0.999 8	0.997 3	0.983 7	0.943 1	0.859 3	0.728 3	0.563 4	0.391 5	0.240 3	0.128 0	0.057 6	0.021 2	0.006 1	0.001 2	0.000 2	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	8	1.000 0	1.000 0	0.999 5	0.995 7	0.980 7	0.940 4	0.860 9	0.736 8	0.577 8	0.407 3	0.252 7	0.134 7	0.059 7	0.021 0	0.005 4	0.000 9	0.000 1	0.000 0	0.000 0
	9	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 1	0.994 6	0.979 0	0.940 3	0.865 3	0.747 3	0.592 7	0.422 2	0.263 2	0.139 1	0.059 6	0.019 3	0.004 3	0.000 5	0.000 0	0.000 0
	10	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 8	0.998 8	0.993 9	0.978 8	0.942 4	0.872 0	0.759 7	0.608 5	0.436 6	0.271 7	0.140 7	0.056 9	0.016 3	0.002 7	0.000 2	0.000 0
	11	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 8	0.998 6	0.993 8	0.979 7	0.946 3	0.881 1	0.774 2	0.625 7	0.450 9	0.278 3	0.139 0	0.051 3	0.011 8	0.001 2	0.000 0
	12	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 7	0.998 6	0.994 2	0.981 7	0.951 9	0.892 3	0.791 2	0.645 0	0.465 6	0.282 5	0.132 9	0.041 9	0.006 4	0.000 2
	13	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 7	0.998 7	0.995 1	0.984 6	0.958 9	0.905 8	0.811 4	0.667 3	0.481 3	0.283 6	0.120 6	0.028 2	0.001 5
	14	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 8	0.999 0	0.996 2	0.988 0	0.967 2	0.921 7	0.835 4	0.694 3	0.499 0	0.279 8	0.098 2	0.010 9
	15	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 3	0.997 5	0.991 8	0.976 4	0.940 0	0.864 7	0.728 7	0.520 3	0.266 2	0.058 1
	16	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 7	0.998 7	0.995 4	0.985 8	0.960 5	0.900 9	0.775 9	0.549 7	0.226 5
	17	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 6	0.998 4	0.994 4	0.982 0	0.946 4	0.849 9	0.602 8
	18	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
19	0	0.377 4	0.135 1	0.045 6	0.014 4	0.004 2	0.001 1	0.000 3	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	1	0.754 7	0.420 3	0.198 5	0.082 9	0.031 0	0.010 4	0.003 1	0.000 8	0.000 2	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	2	0.933 5	0.705 4	0.441 3	0.236 9	0.111 3	0.046 2	0.017 0	0.005 5	0.001 5	0.000 4	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	3	0.986 8	0.885 0	0.648 1	0.455 1	0.263 1	0.133 2	0.059 1	0.023 0	0.007 7	0.002 2	0.000 5	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	4	0.998 0	0.964 8	0.855 6	0.673 3	0.465 4	0.282 2	0.150 0	0.069 6	0.028 0	0.009 6	0.002 8	0.000 6	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	5	0.999 8	0.991 4	0.946 3	0.836 9	0.667 8	0.473 9	0.296 8	0.162 9	0.077 7	0.031 8	0.010 9	0.003 1	0.000 7	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	6	1.000 0	0.998 3	0.983 7	0.932 4	0.825 1	0.665 5	0.481 2	0.308 1	0.172 7	0.083 5	0.034 2	0.011 6	0.003 1	0.000 6	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	7	1.000 0	0.999 7	0.995 9	0.976 7	0.922 5	0.818 0	0.665 6	0.487 8	0.316 9	0.179 6	0.087 1	0.035 2	0.001 4	0.002 8	0.000 5	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	8	1.000 0	1.000 0	0.999 2	0.993 3	0.971 3	0.916 1	0.814 5	0.667 5	0.494 0	0.323 8	0.184 1	0.088 5	0.034 7	0.010 5	0.002 3	0.000 3	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	9	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.998 4	0.991 1	0.967 4	0.912 5	0.813 9	0.671 0	0.500 0	0.329 0	0.186 1	0.087 5	0.032 6	0.008 9	0.001 6	0.000 1	0.000 0	0.000 0
	10	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 7	0.997 7	0.989 5	0.965 3	0.911 5	0.815 9	0.676 2	0.506 0	0.332 5	0.185 5	0.083 9	0.028 7	0.006 7	0.000 8	0.000 0	0.000 0

续表

n	x	θ = 0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
	11	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 5	0.997 2	0.988 6	0.964 8	0.912 9	0.820 4	0.683 1	0.512 2	0.334 4	0.182 0	0.077 5	0.023 3	0.004 1	0.000 3	0.000 0
	12	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 4	0.996 9	0.988 4	0.965 8	0.916 5	0.827 3	0.691 9	0.518 8	0.334 5	0.174 9	0.067 6	0.016 3	0.001 7	0.000 0
	13	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 3	0.996 9	0.989 1	0.968 2	0.922 3	0.837 1	0.703 2	0.526 1	0.332 2	0.163 1	0.053 7	0.008 6	0.000 2
	14	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 4	0.997 2	0.990 4	0.972 0	0.930 4	0.850 0	0.717 8	0.534 6	0.326 7	0.144 4	0.035 2	0.002 0
	15	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 5	0.997 8	0.992 3	0.977 0	0.940 9	0.866 8	0.736 9	0.544 9	0.315 9	0.115 0	0.013 2
	16	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 6	0.998 5	0.994 5	0.983 0	0.953 8	0.888 7	0.763 1	0.558 7	0.294 6	0.066 5
	17	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 8	0.999 2	0.996 9	0.989 6	0.969 0	0.917 1	0.801 5	0.579 7	0.245 3
	18	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 7	0.998 9	0.995 8	0.985 6	0.954 4	0.846 9	0.622 6
	19	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
20	0	0.358 5	0.121 6	0.038 8	0.011 5	0.003 2	0.000 8	0.000 2	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	1	0.735 8	0.391 7	0.175 6	0.069 2	0.024 3	0.007 6	0.002 1	0.000 5	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	2	0.924 5	0.676 9	0.404 9	0.206 1	0.091 3	0.035 5	0.012 1	0.003 6	0.000 9	0.000 2	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	3	0.984 1	0.867 0	0.647 7	0.411 4	0.225 2	0.107 1	0.044 4	0.016 0	0.004 9	0.001 3	0.000 3	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	4	0.997 4	0.956 8	0.829 8	0.629 6	0.414 8	0.237 5	0.118 2	0.051 0	0.018 9	0.005 9	0.001 5	0.000 3	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	5	0.999 7	0.988 7	0.932 7	0.804 2	0.617 2	0.416 4	0.245 4	0.125 6	0.055 3	0.020 7	0.006 4	0.001 6	0.000 3	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	6	1.000 0	0.997 6	0.978 1	0.913 3	0.785 8	0.608 0	0.416 6	0.250 0	0.129 9	0.057 7	0.021 4	0.006 5	0.001 5	0.000 3	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	7	1.000 0	0.999 6	0.994 1	0.967 9	0.898 2	0.772 3	0.601 0	0.415 9	0.252 0	0.131 6	0.058 0	0.021 0	0.006 0	0.001 3	0.000 2	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	8	1.000 0	0.999 9	0.998 7	0.990 0	0.959 1	0.886 7	0.762 4	0.595 6	0.414 3	0.251 7	0.130 8	0.056 5	0.019 6	0.005 1	0.000 9	0.000 1	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	9	1.000 0	1.000 0	0.999 8	0.997 4	0.986 1	0.952 0	0.878 2	0.755 3	0.591 4	0.411 9	0.249 3	0.127 5	0.053 2	0.017 1	0.003 9	0.000 6	0.000 0	0.000 0	0.000 0
	10	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 4	0.996 1	0.982 9	0.946 8	0.872 5	0.750 7	0.588 1	0.408 6	0.244 7	0.121 8	0.048 0	0.013 9	0.002 6	0.000 2	0.000 0	0.000 0
	11	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 1	0.994 9	0.980 4	0.943 5	0.869 2	0.748 3	0.585 7	0.404 4	0.237 6	0.113 3	0.404 9	0.010 0	0.001 3	0.000 1	0.000 0
	12	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 8	0.998 7	0.994 0	0.979 0	0.942 0	0.868 4	0.748 0	0.584 1	0.399 0	0.227 7	0.101 8	0.032 1	0.005 9	0.000 4	0.000 0
	13	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 7	0.998 5	0.993 5	0.978 6	0.942 3	0.870 1	0.750 0	0.583 4	0.392 0	0.214 2	0.086 7	0.021 9	0.002 4	0.000 0
	14	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 7	0.998 4	0.993 6	0.979 3	0.944 7	0.874 4	0.754 6	0.583 6	0.382 8	0.195 8	0.067 3	0.011 3	0.000 3
	15	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 7	0.998 5	0.994 1	0.981 1	0.949 0	0.881 8	0.762 5	0.585 2	0.370 4	0.170 2	0.043 2	0.002 6
	16	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 7	0.998 7	0.995 1	0.984 0	0.955 6	0.892 9	0.774 8	0.588 6	0.352 3	0.133 0	0.015 9
	17	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 8	0.999 1	0.996 4	0.987 6	0.964 5	0.908 7	0.793 9	0.595 1	0.323 1	0.075 5
	18	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9	0.999 5	0.997 9	0.992 4	0.975 7	0.930 8	0.824 4	0.608 3	0.264 2
	19	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 8	0.999 2	0.996 8	0.988 5	0.961 2	0.878 4	0.641 5
	20	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0

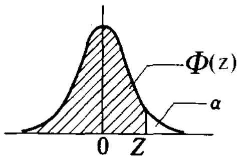
表 2 泊松分布表

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$

x \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.904 837	0.818 731	0.740 818	0.670 320	0.606 531	0.548 812	0.496 587	0.449 329	0.406 570	0.367 879
1	0.09 484	0.163 746	0.222 245	0.268 128	0.303 265	0.329 287	0.347 610	0.359 463	0.365 913	0.367 879
2	0.004 524	0.016 375	0.033 337	0.053 626	0.075 816	0.098 786	0.121 663	0.143 785	0.146 661	0.183 940
3	0.000 151	0.001 092	0.003 334	0.007 150	0.012 636	0.019 757	0.028 388	0.038 343	0.049 398	0.061 313
4	0.000 004	0.000 055	0.000 250	0.000 715	0.001 580	0.002 964	0.004 968	0.007 669	0.011 115	0.015 328
5		0.000 002	0.000 015	0.000 057	0.000 158	0.000 356	0.000 696	0.001 227	0.002 001	0.003 066
6			0.000 001	0.000 004	0.000 013	0.000 036	0.000 081	0.000 164	0.000 300	0.000 511
7					0.000 001	0.000 003	0.000 008	0.000 019	0.000 039	0.000 073
8							0.000 001	0.000 002	0.000 004	0.000 009
9										0.000 001
10										
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										
18										
19										
20										
21										
22										
23										
24										
25										
26										
27										
28										
29										

x \ λ	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	1.0
0	0.223 130	0.135 335	0.082 085	0.049 787	0.030 197	0.018 316	0.011 109	0.006 738	0.002 479	0.000 912	0.000 335	0.000 123	0.000 045
1	0.334 695	0.270 671	0.205 212	0.149 361	0.105 691	0.073 263	0.049 990	0.033 690	0.014 873	0.006 383	0.002 684	0.001 111	0.000 454
2	0.251 021	0.270 671	0.256 516	0.224 042	0.184 959	0.146 525	0.112 479	0.084 224	0.044 618	0.022 341	0.010 735	0.004 998	0.002 270
3	0.125 510	0.180 447	0.213 763	0.224 042	0.215 785	0.195 367	0.168 718	0.140 374	0.089 235	0.052 129	0.028 626	0.014 994	0.007 567
4	0.047 067	0.090 224	0.133 602	0.168 031	0.188 812	0.195 367	0.189 808	0.175 467	0.133 853	0.091 226	0.057 252	0.033 737	0.018 917
5	0.014 120	0.036 089	0.066 801	0.100 819	0.132 169	0.156 293	0.170 827	0.175 467	0.160 623	0.127 717	0.091 604	0.060 727	0.037 833
6	0.003 530	0.012 030	0.027 834	0.050 409	0.077 098	0.104 196	0.128 120	0.146 223	0.160 623	0.149 003	0.122 138	0.091 090	0.063 055
7	0.000 756	0.003 437	0.009 041	0.021 604	0.038 549	0.059 540	0.082 363	0.104 445	0.137 677	0.149 003	0.139 587	0.117 116	0.090 079
8	0.000 142	0.000 859	0.003 106	0.008 102	0.016 865	0.029 770	0.046 329	0.065 278	0.103 258	0.130 377	0.139 587	0.131 756	0.112 599
9	0.000 024	0.000 191	0.000 863	0.002 701	0.006 559	0.013 231	0.023 165	0.036 266	0.068 838	0.101 405	0.124 077	0.131 756	0.125 110
10	0.000 004	0.000 038	0.000 216	0.000 810	0.002 296	0.005 292	0.010 424	0.018 133	0.041 303	0.070 983	0.099 262	0.118 580	0.125 110
11		0.000 007	0.000 049	0.000 221	0.000 730	0.001 925	0.004 264	0.008 242	0.022 529	0.045 171	0.072 190	0.097 020	0.110 736
12		0.000 001	0.000 010	0.000 055	0.000 213	0.000 642	0.001 599	0.003 434	0.011 264	0.026 350	0.048 127	0.072 765	0.094 780
13			0.000 002	0.000 013	0.000 057	0.000 197	0.000 554	0.001 321	0.005 199	0.014 188	0.029 616	0.050 376	0.072 908
14				0.000 003	0.000 014	0.000 056	0.000 178	0.000 472	0.002 228	0.007 094	0.016 924	0.032 384	0.052 077
15				0.000 001	0.000 003	0.000 015	0.000 053	0.000 157	0.000 891	0.003 311	0.009 026	0.019 431	0.034 718
16					0.000 001	0.000 004	0.000! 015	0.000 049	0.000 334	0.001 448	0.004 513	0.010 930	0.021 699
17						0.000 001	0.000 004	0.000 014	0.000 118	0.000 596	0.002 124	0.005 786	0.012 746
18							0.000 001	0.000 004	0.000 039	0.000 232	0.000 944	0.002 893	0.007 091
19								0.000 001	0.000 012	0.000 085	0.000 379	0.001 370	0.003 732
20									0.000 004	0.000 030	0.000 159	0.000 617	0.001 866
21									0.000 001	0.000 010	0.000 016	0.000 264	0.000 889
22									0.000 001	0.000 010	0.000 061	0.000 246	0.000 889
23										0.000 003	0.000 022	0.000 108	0.000 404
24											0.000 003	0.000 016	0.000 073
25											0.000 001	0.000 006	0.000 029
26												0.000 002	0.000 011
27												0.000 001	0.000 004
28													0.000 001
29													0.000 001

表 3 标准正态分布表



$$\Phi(z)\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500 000	0.503 989	0.507 978	0.511 966	0.515 953	0.519 939	0.523 922	0.527 903	0.531 881	0.535 856
0.1	0.539 828	0.543 795	0.547 758	0.551 717	0.555 670	0.559 618	0.563 559	0.567 495	0.571 424	0.575 345
0.2	0.579 260	0.583 166	0.587 064	0.590 954	0.594 835	0.598 706	0.602 568	0.606 420	0.610 261	0.614 092
0.3	0.617 911	0.621 720	0.625 516	0.629 300	0.633 072	0.636 831	0.640 576	0.644 309	0.648 027	0.651 732
0.4	0.655 422	0.659 097	0.662 757	0.666 402	0.670 310	0.673 645	0.677 242	0.680 822	0.684 386	0.687 933
0.5	0.691 462	0.694 974	0.689 468	0.701 944	0.705 401	0.708 840	0.712 260	0.715 661	0.719 043	0.722 405
0.6	0.725 747	0.729 069	0.723 371	0.735 371	0.735 653	0.738 914	0.742 154	0.745 373	0.748 571	0.751 748
0.7	0.758 036	0.761 148	0.764 238	0.767 305	0.770 350	0.773 373	0.776 373	0.779 350	0.782 305	0.785 236
0.8	0.788 145	0.791 030	0.793 892	0.796 731	0.799 546	0.802 337	0.805 105	0.807 850	0.810 570	0.813 267
0.9	0.815 940	0.818 589	0.821 214	0.823 814	0.826 391	0.828 944	0.831 472	0.833 977	0.836 457	0.838 913
1.0	0.841 345	0.843 752	0.846 136	0.848 495	0.850 830	0.853 141	0.855 428	0.857 690	0.859 929	0.862 143
1.1	0.864 334	0.866 500	0.868 643	0.870 762	0.872 857	0.874 908	0.876 976	0.879 000	0.881 000	0.882 977
1.2	0.884 930	0.886 861	0.888 768	0.890 651	0.892 512	0.894 350	0.896 165	0.897 958	0.899 727	0.901 475
1.3	0.903 200	0.904 902	0.906 582	0.908 241	0.909 877	0.911 492	0.913 085	0.914 657	0.916 207	0.917 736
1.4	0.191 243	0.920 730	0.922 196	0.923 641	0.925 066	0.926 471	0.927 855	0.929 219	0.930 563	0.931 888
1.5	0.933 193	0.934 478	0.935 745	0.936 992	0.938 220	0.939 429	0.940 620	0.941 792	0.942 947	0.944 083
1.6	0.945 201	0.946 301	0.947 384	0.948 449	0.949 497	0.950 529	0.951 543	0.952 540	0.953 521	0.954 486
1.7	0.955 435	0.956 367	0.957 284	0.958 185	0.959 070	0.959 941	0.960 796	0.961 636	0.962 462	0.963 273
1.8	0.964 070	0.964 852	0.965 620	0.966 375	0.967 116	0.967 843	0.968 557	0.969 258	0.969 946	0.970 621
1.9	0.971 283	0.971 933	0.972 571	0.973 197	0.973 810	0.974 412	0.975 002	0.975 581	0.976 148	0.976 705
2.0	0.977 250	0.977 784	0.978 308	0.978 822	0.979 325	0.979 818	0.980 301	0.980 774	0.981 237	0.981 691
2.1	0.982 136	0.982 571	0.982 997	0.983 414	0.983 823	0.984 222	0.984 614	0.984 997	0.985 371	0.985 738
2.2	0.986 097	0.986 447	0.986 791	0.987 126	0.987 455	0.987 776	0.988 089	0.988 396	0.988 696	0.988 989

续表

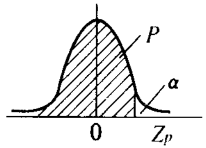
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.3	0.989 276	0.989 556	0.989 830	0.990 097	0.990 358	0.990 613	0.990 863	0.991 106	0.991 344	0.991 576
2.4	0.991 802	0.992 024	0.992 240	0.992 451	0.992 656	0.992 857	0.993 053	0.993 244	0.993 431	0.993 613
2.5	0.993 790	0.993 963	0.994 132	0.994 297	0.994 457	0.994 614	0.994 766	0.994 915	0.995 060	0.995 201
2.6	0.995 339	0.995 473	0.995 604	0.995 731	0.995 855	0.995 975	0.996 093	0.996 207	0.996 319	0.996 427
2.7	0.996 533	0.996 636	0.996 736	0.996 833	0.996 928	0.997 020	0.997 110	0.997 197	0.997 282	0.997 365
2.8	0.997 445	0.997 523	0.997 599	0.997 673	0.997 744	0.997 814	0.997 882	0.997 948	0.998 012	0.998 074
2.9	0.998 134	0.998 193	0.998 250	0.998 305	0.998 359	0.998 411	0.998 462	0.998 511	0.998 559	0.998 605
3.0	0.998 650	0.998 694	0.998 736	0.998 777	0.998 817	0.998 856	0.998 893	0.998 930	0.998 965	0.998 999
3.1	0.999 032	0.999 065	0.999 096	0.999 126	0.999 155	0.999 184	0.999 211	0.999.238	0.999 264	0.999 289
3.2	0.999 313	0.999 336	0.999 359	0.999 381	0.999 402	0.999 423	0.999 443	0.999 462	0.999 481	0.999 499
3.3	0.999 517	0.999 534	0.999 550	0.999 566	0.999 581	0.999 596	0.999 610	0.999 624	0.999 638	0.999 651
3.4	0.999 663	0.999 675	0.999 687	0.999 698	0.999 709	0.999 720	0.999 730	0.999 740	0.999 749	0.999 758
3.5	0.999 767	0.999 776	0.999 784	0.999 792	0.999 800	0.999 807	0.999 815	0.999 822	0.999 828	0.999 836
3.6	0.999 841	0.999 847	0.999 853	0.999 858	0.999 864	0.999 869	0.999 874	0.999 879	0.999 883	0.999 888
3.7	0.999 892	0.999 896	0.999 900	0.999 904	0.999 908	0.999 912	0.999 915	0.999 918	0.999 922	0.999 925
3.8	0.999 928	0.999 931	0.999 933	0.999 936	0.999 938	0.999 941	0.999 943	0.999 946	0.999 948	0.999 950
3.9	0.999 952	0.999 954	0.999 956	0.999 958	0.999 959	0.999 961	0.999 963	0.999 964	0.999 966	0.999 967
4.0	0.999 968	0.999 970	0.999 971	0.999 972	0.999 973	0.999 974	0.999 975	0.999 976	0.999 977	0.999 978
4.1	0.999 979	0.999 980	0.999 981	0.999 982	0.999 983	0.999 983	0.999 984	0.999 985	0.999 985	0.999 986
4.2	0.999 987	0.999 987	0.999 988	0.999 988	0.999 989	0.999 989	0.999 990	0.999 990	0.999 991	0.999 991
4.3	0.999 991	0.999 992	0.999 992	0.999 993	0.999 993	0.999 993	0.999 993	0.999 994	0.999 994	0.999 994
4.4	0.999 995	0.999 995	0.999 995	0.999 995	0.999 996	0.999 996	0.999 996	0.999 996	0.999 996	0.999 996
4.5	0.999 997	0.999 997	0.999 997	0.999 997	0.999 997	0.999 997	0.999 997	0.999 998	0.999 998	0.999 998
4.6	0.999 998	0.999 998	0.999 998	0.999 998	0.999 998	0.999 998	0.999 998	0.999 998	0.999 999	0.999 999
4.7	0.999 999	0.999 999	0.999 999	0.999 999	0.999 999	0.999 999	0.999 999	0.999 999	0.999 999	0.999 999
4.8	0.999 999	0.999 999	0.999 999	0.999 999	0.999 999	0.999 999	0.999 999	0.999 999	0.999 999	0.999 999
4.9	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000

注本表对于 z 给出正态分布函数 $\Phi(z)$ 的数值。

例:对于 $z=1.33$, $\Phi(z)=0.908\ 241$

表 4 正态分布分位数表

$$Z_p = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dx = p$$



p	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.50	0.000 000	0.002 507	0.005 013	0.007 520	0.010 027	0.012 533	0.015 040	0.017 547	0.020 054	0.022 562
0.51	0.025 069	0.027 576	0.030 084	0.032 592	0.035 100	0.037 608	0.040 117	0.042 626	0.045 135	0.047 644
0.52	0.050 154	0.052 664	0.055 174	0.057 684	0.060 195	0.062 707	0.065 219	0.067 713	0.070 243	0.072 756
0.53	0.075 270	0.077 784	0.080 298	0.082 813	0.085 329	0.087 845	0.090 361	0.092 879	0.095 396	0.097 915
0.54	0.100 434	0.102 953	0.105 474	0.107 995	0.110 516	0.113 039	0.115 562	0.118 085	0.120 610	0.123 135
0.55	0.125 661	0.128 188	0.130 716	0.133 245	0.135 774	0.138 304	0.140 835	0.143 367	0.145 900	0.148 434
0.56	0.150 969	0.153 505	0.056 042	0.158 580	0.161 119	0.163 658	0.166 199	0.168 741	0.171 285	0.173 829
0.57	0.176 374	0.178 921	0.181 468	0.184 017	0.186 567	0.189 118	0.191 671	0.194 225	0.196 780	0.199 336
0.58	0.201 893	0.204 452	0.207 013	0.209 574	0.212 137	0.214 702	0.217 267	0.219 835	0.222 403	0.224 973
0.59	0.227 545	0.230 118	0.232 693	0.235 269	0.237 847	0.240 426	0.243 007	0.245 590	0.248 174	0.250 760
0.60	0.253 347	0.255 936	0.258 527	0.261 120	0.263 714	0.266 311	0.268 909	0.271 508	0.274 110	0.276 714
0.61	0.279 319	0.281 926	0.284 536	0.287 147	0.289 760	0.292 275	0.294 992	0.297 611	0.300 232	0.302 855
0.62	0.305 481	0.308 108	0.310 738	0.313 369	0.316 003	0.318 639	0.321 278	0.323 918	0.326 561	0.329 206
0.63	0.331 853	0.334 503	0.337 155	0.339 809	0.342 766	0.345 126	0.347 787	0.350 451	0.353 118	0.355 787
0.64	0.358 459	0.361 133	0.363 810	0.366 489	0.369 171	0.371 856	0.374 543	0.377 234	0.379 926	0.382 622
0.65	0.385 320	0.388 022	0.390 786	0.393 433	0.396 142	0.398 855	0.401 571	0.404 289	0.407 011	0.409 735
0.66	0.412 463	0.415 194	0.417 928	0.420 665	0.423 405	0.426 148	0.428 895	0.431 644	0.434 397	0.437 154
0.67	0.439 913	0.442 676	0.445 443	0.448 212	0.450 985	0.453 762	0.456 542	0.459 326	0.462 113	0.464 904
0.68	0.467 699	0.470 497	0.473 299	0.476 104	0.478 914	0.481 727	0.484 544	0.487 365	0.490 189	0.493 018
0.69	0.495 850	0.498 687	0.501 527	0.504 372	0.507 221	0.510 073	0.512 930	0.515 792	0.518 657	0.521 527
0.70	0.524 401	0.527 279	0.530 161	0.533 049	0.535 940	0.538 836	0.841 737	0.544 642	0.547 551	0.550 466
0.71	0.553 385	0.556 308	0.559 237	0.562 175	0.655 108	0.568 051	0.570 999	0.573 952	0.576 910	0.579 873
0.72	0.582 842	0.585 815	0.588 793	0.591 777	0.594 766	0.597 760	0.600 760	0.603 765	0.606 775	0.609 792
0.73	0.612 813	0.615 840	0.618 873	0.621 912	0.624 956	0.628 006	0.631 062	0.634 124	0.637 192	0.640 266
0.74	0.643 345	0.646 431	0.649 524	0.652 622	0.655 727	0.658 838	0.661 955	0.665 079	0.668 209	0.671 346
0.75	0.674 490	0.677 640	0.680 797	0.683 961	0.687 131	0.690 309	0.693 493	0.696 685	0.699 884	0.703 089

续表

p	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.76	0.706 303	0.709 523	0.712 751	0.715 986	0.719 229	0.722 479	0.725 737	0.729 003	0.732 276	0.735 558
0.77	0.738 847	0.742 144	0.745 450	0.748 763	0.752 085	0.755 415	0.758 754	0.762 101	0.765 456	0.768 820
0.78	0.772 193	0.775 575	0.778 966	0.782 365	0.785 774	0.789 192	0.792 619	0.796 055	0.799 501	0.802 956
0.79	0.806 421	0.809 896	0.813 380	0.816 875	0.820 379	0.823 894	0.827 418	0.830 953	0.834 499	0.838 055
0.80	0.841 621	0.845 199	0.848 787	0.852 386	0.855 996	0.859 617	0.863 250	0.866 894	0.870 550	0.874 219
0.81	0.877 896	0.881 587	0.885 290	0.889 006	0.892 733	0.896 473	0.900 226	0.903 991	0.907 770	0.911 561
0.82	0.915 365	0.919 183	0.923 014	0.926 859	0.930 717	0.934 589	0.938 476	0.942 376	0.946 291	0.950 221
0.83	0.954 765	0.958 124	0.962 099	0.966 088	0.970 093	0.974 114	0.978 150	0.982 203	0.986 271	0.990 356
0.84	0.994 458	0.998 576	1.002 217	1.006 864	1.011 034	1.015 222	1.019 428	1.023 651	1.027 893	1.032 154
0.85	1.036 433	1.040 832	1.045 050	1.049 387	1.053 744	1.058 122	1.062 519	1.066 938	1.071 377	1.075 837
0.86	1.080 319	1.084 823	0.089 349	1.097 897	1.098 468	1.103 063	1.107 680	1.112 321	1.116 987	1.121 677
0.87	1.126 391	1.131 131	1.135 896	1.140 687	1.145 505	1.150 349	1.155 221	1.160 120	1.165 047	1.170 002
0.88	1.174 987	1.180 001	1.185 044	1.190 118	1.195 223	1.200 359	1.205 527	1.210 727	1.215 960	1.221 227
0.89	1.226 528	1.231 864	1.237 235	1.242 641	1.248 085	1.253 565	1.259 084	1.264 641	1.270 238	1.275 874
0.90	1.281 552	1.287 271	1.293 032	1.298 837	1.304 685	1.310 579	1.316 519	1.322 505	1.328 539	1.334 622
0.91	1.340 755	1.346 939	1.353 174	1.359 463	1.365 806	1.372 204	1.378 659	1.385 172	1.391 744	1.398 377
0.92	1.405 072	1.411 830	1.418 654	1.425 544	1.432 503	1.439 531	1.446 632	1.453 806	1.461 056	1.468 384
0.93	1.475 791	1.483 280	1.490 853	1.498 513	1.506 262	1.514 102	1.522 036	1.530 068	1.538 199	1.546 433
0.94	1.554 774	1.563 324	1.571 787	1.580 467	1.589 268	1.598 193	1.607 248	1.616 436	1.625 763	1.635 234
0.95	1.644 854	1.654 628	1.664 563	1.674 665	1.684 941	1.695 398	1.706 043	1.716 886	1.727 934	1.739 198
0.96	1.750 686	1.762 410	1.774 382	1.786 613	1.799 118	1.811 911	1.825 007	1.838 424	1.852 180	1.866 296
0.97	1.880 794	1.895 698	1.911 036	1.926 837	1.943 134	1.959 964	1.977 368	1.995 393	2.014 091	2.033 520
0.98	2.053 749	2.074 855	2.096 927	2.120 072	2.144 411	2.170 090	2.197 286	2.226 212	2.257 129	2.290 368
0.99	2.326 348	2.365 618	2.408 916	2.457 263	2.512 144	2.575 829	2.652 070	2.747 781	2.878 162	2.990 232

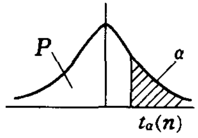
注：本表对于 $p \geq 0.5$ 概率给出正态分布的分位数 Z_p。

例：对于 $p=0.95, Z_p=1.644\ 854$。

当 $p<0.5$ 时，$Z_p=-Z_{1-p}$，例 $Z_{0.1}=-Z_{0.9}=-1.281\ 552$。

与双侧概率 α 相应的分位数为 $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$。例：对于 $\alpha=0.05, Z_{1-\alpha/2}=Z_{0.975}=1.959\ 964$。

表 5 t 分布表

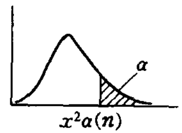


$$P\{t(n) > t_\alpha(n)\} = \alpha$$

自由度 n	$\alpha=2.5$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.000 0	3.077 7	6.313 8	12.706 2	31.820 7	63.657 4
2	0.816 5	1.885 6	2.920 0	4.302 7	6.964 6	9.924 8
3	0.764 9	1.637 7	2.353 4	3.182 4	4.540 7	5.840 9
4	0.740 7	1.533 2	2.131 8	2.776 4	3.746 9	4.604 1
5	0.726 7	1.475 9	2.015 0	2.570 6	3.364 9	4.032 2
6	0.717 6	1.439 8	1.943 2	2.446 9	3.142 7	3.707 4
7	0.711 1	1.414 9	1.894 6	2.364 6	2.998 0	3.499 5
8	0.706 4	1.396 8	1.859 5	2.306 0	2.896 5	3.355 4
9	0.702 7	1.383 0	1.833 1	2.262 2	2.821 4	3.249 8
10	0.699 8	1.372 2	1.812 5	2.228 1	2.763 8	2.169 3
11	0.6974	1.363 4	1.795 9	2.201 0	2.718 1	3.105 8
12	0.695 5	1.356 2	1.782 3	2.178 8	2.681 0	3.054 5
13	0.693 8	1.350 2	1.770 9	2.160 4	2.650 3	3.012 3
14	0.692 4	1.345 0	1.761 3	2.144 8	2.624 5	2.976 8
15	0.691 2	1.340 6	1.753 1	2.131 5	2.602 5	2.946 7
16	0.690 1	1.368 8	1.745 9	2.119 9	2.583 5	2.920 8
17	0.689 2	1.333 4	1.739 6	2.109 8	2.566 9	2.898 2
18	0.688 4	1.330 4	1.734 1	2.100 9	2.552 4	2.878 4
19	0.687 6	1.327 7	1.729 1	2.093 0	2.539 5	2.860 9
20	0.687 0	1.325 3	1.724 7	2.086 0	2.528 0	2.845 3
21	0.684 6	1.323 2	1.720 7	2.079 6	2.517 7	2.831 4
22	0.685 8	1.321 2	1.717 1	2.073 9	2.508 3	2.818 8
23	0.685 3	1.319 5	1.713 9	2.068 7	2.499 9	2.807 3

自由度 n	$\alpha=2.5$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
24	0.684 8	1.317 8	1.710 9	2.063 9	2.492 2	0.796 9
25	0.684 4	1.316 3	1.708 1	2.059 5	2.485 1	2.787 4
26	0.684 0	1.315 0	1.705 6	2.055 5	2.478 6	2.778 7
27	0.683 7	1.313 7	1.703 3	2.051 8	2.472 7	2.770 7
28	0.683 4	1.312 5	1.701 1	2.048 4	2.467 1	2.763 3
29	0.683 0	1.311 4	1.699 1	2.045 2	2.462 0	2.756 4
30	0.682 8	1.310 4	1.697 3	2.042 3	2.457 3	2.750 0
31	0.682 5	1.309 5	1.695 5	2.039 5	2.452 8	2.744 0
32	0.682 2	1.308 6	1.693 9	2.036 9	2.448 7	2.738 5
33	0.681 8	1.307 0	1.690 9	2.032 2	2.441 1	2.728 4
34	0.681 6	1.306 2	1.689 6	2.030 1	2.437 7	2.723 8
35	0.681 4	1.305 5	1.688 3	2.028 1	2.454 3	2.719 5
36	0.681 2	1.304 9	1.687 1	2.026 2	2.431 4	2.715 4
37	0.681 0	1.304 2	1.686 0	2.024 4	2.428 6	2.711 6
38	0.680 8	1.303 6	1.684 9	2.022 7	2.425 8	2.707 9
39	0.680 7	1.303 0	1.683 9	2.021 1	2.423 3	2.704 5
40	0.680 5	1.302 5	1.682 9	2.019 5	2.420 8	2.701 2
41	0.680 4	1.302 0	1.682 0	2.018 1	2.418 5	2.698 1
42	0.680 2	1.301 6	1.681 1	2.016 7	2.416 3	2.695 1
43	0.680 1	1.301 1	1.680 2	2.015 4	2.414 1	2.692 3
44	0.680 0	1.300 6	1.679 4	2.014 1	2.412 1	2.689 6

表 6 χ^2 分布表



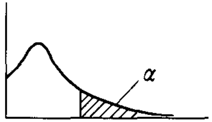
$$P\{(\chi^2)(n) > Z_\alpha^2(n)\} = \alpha$$

n	α=0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.75	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	—	—	0.001	0.004	0.016	0.102	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	5.385	7.779	9.448	11.143	13.277	14.806
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675	6.626	9.236	11.072	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.455	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	13.701	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.047	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	14.845	18.549	21.026	23.337	26.217	28.299
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299	15.984	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.165	17.117	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	2.262	7.261	8.547	11.037	18.245	22.307	24.996	27.488	3.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.912	19.369	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	12.792	20.489	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	13.675	21.605	29.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	14.562	22.718	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	15.452	23.828	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	16.344	24.935	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	17.240	26.039	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	18.137	27.141	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	19.037	28.241	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559

续表

n	$\alpha=0.995$	0.99	0.975	0.95	0.90	0.75	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	19.939	29.339	34.382	37.652	4.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	20.843	30.435	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	21.749	31.528	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	22.657	32.620	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.257	16.047	17.708	19.768	23.567	33.711	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	24.478	34.800	40.256	43.773	46.949	50.892	53.672
31	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	25.390	35.887	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	26.304	36.973	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.815	17.074	19.047	20.867	23.110	27.219	38.058	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	28.136	39.141	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	29.054	40.223	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	29.973	41.304	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.586	19.960	22.106	24.075	26.492	30.893	42.383	48.363	52.192	55.668	59.892	62.883
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	31.815	43.462	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	19.996	21.426	23.654	25.695	28.196	32.737	44.539	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	33.660	45.616	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
41	21.421	22.906	25.215	27.326	29.907	34.585	46.692	52.949	56.942	60.561	64.950	68.053
42	22.138	23.650	25.999	28.144	30.765	35.510	47.766	54.090	58.124	61.777	66.206	69.336
43	22.859	24.398	26.785	28.965	31.625	36.436	48.840	55.230	59.354	62.990	67.459	70.616
44	23.584	25.148	27.575	29.787	32.487	37.363	49.913	56.369	60.481	46.201	68.710	71.893
45	24.311	25.901	28.366	30.621	33.350	38.291	40.985	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166

表 7　F 分布表



$F_\alpha(n_1,n_2)$

$$P\{F(n_1,n_2)>F_\alpha(n_1,n_2)\}=\alpha$$

$$(\alpha=0.10)$$

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.72
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.57	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.95	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.38	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	3.14	2.76	5.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	2.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.68	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59

续表

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	2.89	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.60	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.65	1.55	1.49	1.42	1.38	1.38	1.30	1.24	1.17	1.00

($\alpha=0.05$)

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.40	199.50	215.70	244.60	230.20	234.00	236.80	238.90	240.50	241.90	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.3	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.83	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21

续表

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	4.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.33	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.93	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.95	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.96	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.23	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.71	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00
($\alpha=0.025$)																			
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.86	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.65	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.34	6.33	6.28	6.32	6.18	6.12	6.07	6.02

续表

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.45	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	4.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	3.89	2.79	7.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.38	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.92	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.32	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.95	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	3.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.30	2.36	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79

续表

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.77	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00
($\alpha=0.01$)																			
1	4 052	4 999.5	5 403	5 625	5 764	5 859	5 928	5 982	6 022	6 056	6 106	6 157	6 209	6 235	6 261	6 287	6 313	6 339	6 366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	3.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	24.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.39	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	2.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.98	4.47	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	4.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	3.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.37	3.17	3.03	2.88	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26

续表

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.26	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	3.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	3.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	2.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00
($\alpha = 0.005$)																			
1	16 211	20 000	21 615	22 500	23 056	23 437	23 715	23 925	24 091	24 224	24 426	24 630	24 836	24 940	25 044	25 148	25 253	25 359	25 465
2	198.5	199.0	199.2	199.2	199.3	199.3	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5
3	55.55	49.80	47.47	46.19	45.39	44.84	44.44	44.13	43.88	43.69	43.39	43.08	42.78	42.62	42.47	42.31	42.15	41.99	41.83
4	31.33	26.28	24.26	23.15	22.46	21.97	21.62	21.35	21.14	20.97	20.76	20.44	20.17	20.03	19.89	19.75	19.61	19.47	19.32
5	22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	14.20	13.96	13.77	13.62	13.38	13.15	12.90	12.78	12.66	12.53	12.40	12.27	12.14
6	18.63	14.54	12.92	12.03	11.46	11.07	10.79	10.57	10.39	10.25	10.03	9.81	9.59	9.47	9.39	9.24	9.12	9.00	8.88
7	16.24	12.40	1.88	1.05	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	8.18	7.97	7.75	7.65	7.53	7.42	7.31	7.19	7.08
8	14.69	11.04	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.29	6.18	6.06	5.95
9	13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.52	5.41	5.30	5.19
10	12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.97	4.86	4.75	4.64
11	12.23	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54	5.42	5.24	5.05	4.86	4.76	4.65	4.55	4.44	4.34	4.23
12	11.75	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.23	4.12	4.01	3.90
13	11.37	8.19	6.93	6.23	2.79	5.48	5.25	5.08	4.94	4.82	4.64	4.46	4.27	4.17	4.07	3.97	3.87	3.76	3.65
14	11.06	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	5.03	4.86	4.72	4.60	4.43	4.25	4.06	3.96	3.86	3.76	3.66	3.55	3.44
15	10.80	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.58	3.48	3.37	3.26

续表

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
16	10.58	7.51	6.30	5.64	5.21	4.91	4.69	4.52	4.38	4.27	4.10	3.92	3.73	3.64	3.54	3.44	3.33	3.32	3.11
17	10.38	7.35	6.16	5.50	5.07	4.78	4.56	4.39	4.25	4.14	3.97	3.79	3.61	3.51	3.41	3.31	3.21	3.10	3.98
18	10.22	7.21	6.03	5.37	4.96	4.66	4.44	4.28	4.14	4.03	3.86	3.68	3.50	3.40	3.30	3.20	3.10	2.99	2.87
19	10.77	7.09	5.92	5.27	4.85	4.56	4.34	4.18	4.04	3.39	3.76	3.59	3.40	3.31	3.21	3.11	3.00	2.89	2.78
20	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.92	2.81	2.69
21	8.83	6.89	5.73	5.09	4.68	4.39	4.18	4.01	3.88	3.77	3.60	3.43	3.24	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.61
22	9.73	6.81	5.65	5.02	4.61	4.32	4.11	3.94	3.81	3.70	3.54	3.36	3.18	3.08	2.98	2.88	2.77	2.66	2.55
23	9.63	6.73	5.58	4.95	4.54	4.26	4.05	3.88	3.75	3.64	3.47	3.30	3.12	3.02	2.92	2.82	2.71	2.60	2.48
24	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69	3.59	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.66	2.55	2.43
25	9.48	6.60	5.46	4.84	4.43	4.15	3.94	3.78	3.64	3.54	3.37	3.20	3.01	2.92	2.82	2.72	2.61	2.50	2.38
26	9.41	6.54	5.41	4.79	4.38	4.10	3.89	3.73	3.60	3.49	3.33	3.15	2.97	2.87	2.77	2.67	2.56	2.45	2.33
27	9.34	6.49	5.36	4.74	4.34	4.06	3.85	3.69	3.56	3.45	3.28	3.11	2.93	2.83	2.73	2.63	2.52	2.41	2.29
28	9.28	6.44	5.32	4.70	4.30	4.02	3.81	3.65	3.52	3.41	3.25	3.07	2.89	2.79	2.69	2.59	2.48	2.37	2.25
29	9.23	6.40	5.28	4.66	4.26	3.89	3.77	3.61	3.48	3.38	3.21	3.04	2.86	2.76	2.66	2.52	2.45	2.33	2.21
30	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3.18	2.01	2.82	2.73	2.63	2.52	2.42	2.30	2.18
40	8.83	6.07	4.98	4.37	3.99	3.71	3.51	3.35	3.22	3.12	2.95	2.78	2.60	2.50	2.40	2.30	2.18	2.06	1.93
60	8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	2.08	1.96	1.83	1.69
120	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	3.93	2.81	2.71	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.87	1.75	1.61	1.43
∞	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	3.62	2.52	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.67	1.53	1.36	1.00
($\alpha = 0.001$)																			
1	4 053+	5 000+	5 404+	5 625+	5 764+	5 859+	5 929+	5 981+	6 023+	6 056+	6 107+	6 158+	6 209+	6 235+	6 261+	6 287+	6 313+	6 340+	6 366+
2	998.5	999.0	999.2	999.2	999.3	999.3	999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5
3	167.0	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	131.66	13.6	129.9	129.2	128.3	127.4	126.4	125.9	125.4	125.0	124.5	124.0	123.5
4	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.53	49.66	49.00	48.47	48.05	47.41	46.76	46.10	45.77	45.43	45.09	44.75	44.40	44.05
5	47.18	37.12	33.20	31.09	29.75	28.84	28.16	27.64	27.24	26.92	26.42	25.91	25.39	25.14	24.87	24.60	24.33	24.60	23.79

注：+表示要将此乘以100。

续表

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
6	35.51	27.00	23.70	21.92	20.81	20.03	19.46	19.03	18.69	18.41	17.99	17.56	17.12	16.89	16.67	16.44	16.21	15.99	15.75
7	29.25	21.69	18.77	17.19	16.21	15.52	15.02	14.63	14.33	14.08	13.71	13.32	12.93	12.73	12.53	12.33	12.12	11.91	11.70
8	25.42	18.49	15.83	14.39	13.49	12.86	12.40	12.04	11.77	11.54	11.19	10.48	10.48	10.30	10.11	9.92	9.73	9.53	9.33
9	22.86	16.39	13.90	12.56	11.71	11.13	10.70	10.37	10.11	9.89	9.57	9.24	8.90	8.72	8.55	8.37	8.19	8.00	7.81
10	21.04	14.91	12.55	11.28	10.48	9.29	9.52	9.20	8.96	8.75	8.45	8.13	7.80	7.64	7.47	7.30	7.12	6.94	6.76
11	19.69	13.81	11.56	10.35	9.58	9.05	8.66	8.35	8.12	7.92	7.63	6.35	7.32	7.01	6.85	6.68	6.52	6.17	6.00
12	18.64	12.97	10.80	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48	7.29	7.00	6.71	6.40	6.25	6.09	5.93	5.76	5.59	5.42
13	17.81	12.31	1.21	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.98	6.80	6.52	6.23	5.93	5.78	5.63	5.47	5.30	5.14	4.97
14	17.14	11.78	9.73	8.62	7.92	7.43	7.08	6.80	6.58	6.40	6.13	5.85	5.56	5.41	5.25	5.10	4.94	4.77	4.60
15	16.59	11.34	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26	6.08	5.81	5.54	5.25	5.10	4.95	4.80	4.64	4.47	4.31
16	16.12	10.97	9.00	7.94	7.27	6.81	6.46	6.19	5.98	5.81	5.55	5.27	4.99	4.85	4.70	4.54	4.39	4.23	4.06
17	15.72	10.66	8.73	7.68	7.02	7.56	6.22	5.96	5.75	5.58	5.32	5.05	4.78	4.63	4.48	4.33	4.18	4.02	3.85
18	15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.56	5.39	5.13	4.87	4.59	4.45	4.30	4.15	4.00	3.84	3.67
19	15.08	10.16	8.28	7.26	6.62	6.18	5.85	5.59	5.39	5.22	4.97	4.70	4.43	4.29	4.14	3.99	3.84	3.68	3.51
20	14.82	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24	5.08	4.82	4.56	4.29	4.15	4.00	3.86	3.70	3.54	3.38
21	14.59	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.56	5.31	5.11	4.95	4.70	4.44	4.17	4.03	3.88	3.74	3.58	3.42	3.26
22	14.38	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.99	4.83	4.58	5.33	4.06	3.92	3.78	3.63	3.48	3.32	3.15
23	14.19	9.47	7.67	6.69	6.08	5.65	5.33	5.09	4.89	4.73	4.48	4.23	3.96	3.82	3.68	3.53	3.38	3.22	3.05
24	14.03	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80	4.64	4.39	4.14	3.87	3.74	3.59	3.45	3.29	3.14	2.97
25	13.88	9.22	7.45	6.49	5.88	5.46	5.15	4.99	4.71	4.56	4.31	4.06	3.79	3.66	3.52	3.37	3.22	3.08	2.89
26	13.74	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83	4.64	4.48	4.24	3.99	3.72	3.59	3.44	3.30	3.15	2.99	2.82
27	13.61	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76	4.57	4.41	4.17	3.92	3.66	3.52	3.38	3.23	3.08	2.92	2.75
28	13.50	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.93	4.69	4.50	4.35	4.11	3.86	3.60	3.46	3.32	3.18	3.02	2.86	2.69
29	13.39	8.35	7.12	6.19	5.59	5.18	4.87	4.64	4.45	4.29	4.05	3.80	3.54	3.41	3.27	3.12	2.97	2.81	2.64
30	13.29	8.77	7.05	6.12	55.53	5.12	4.82	4.52	4.39	4.24	4.00	3.75	3.49	3.36	3.22	3.07	2.92	2.76	2.59
40	12.61	8.25	6.60	5.70	5.13	4.73	4.44	4.21	4.02	3.87	3.64	3.40	3.15	3.01	3.87	2.73	2.57	2.41	2.23
60	11.97	7.76	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.87	3.69	3.54	3.31	3.08	2.83	2.69	2.55	2.41	2.25	2.08	1.89
120	11.38	7.22	5.79	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.38	3.24	3.02	2.78	2.53	2.40	2.26	2.11	1.95	1.76	1.54
∞	10.83	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	3.10	2.96	2.74	2.51	2.27	2.13	1.99	1.84	1.66	1.45	1.00

参 考 书 目

1 袁卫，庞浩，曾五一主编．统计学．北京：高等教育出版社，2001

2 徐国祥，刘汉良，孙允午，朱建中编著．统计学．上海：上海财经大学出版社，2001

3 ［美］戴维 R．安德森，丹尼斯 A．斯威尼，托马斯 A．威廉姆斯著．商务与经济统计．（中文版）北京：机械工业出版社，2000

4 李心悦编著．应用经济统计学．北京：北京大学出版社，1999

5 陆璇编著．应用统计．北京：清华大学出版社，1999

6 何晓群编著．现代统计分析方法与应用．北京：中国人民大学出版社，1998

7 ［美］Terry Sincich 著．例解商务统计学．（第五版）（中文版）．北京：清华大学出版社，2001

8 卫海英主编．应用统计学．广州：暨南大学出版社，2002

9 黄良文主编．统计学原理．北京：中国统计出版社，1999

10 柯惠新，黄京华，沈浩编著．统计分析法．北京：北京广播学院出版社，1992

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝管理统计学
作者＝宋光辉编著
页数＝１９０
ＳＳ号＝１１７３１０７１
出版日期＝２００６年１０月


全国职业经理MBA双证班
精品课程 火热招生
函授学习 权威双证 全国招生 请速充电